

# HOMOTOPIE ET HOMOLOGIE

Prof. K. HESS-BELLWALD  
TEXé par Cédric HO THANH

Automne 2012



Relu et corrigé



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une introduction axiomatique à l'homologie</b>	<b>5</b>
1.1	Éléments de la théorie des catégories . . . . .	5
1.2	Invariants homotopiques . . . . .	9
1.2.1	Homotopie dans $\mathbf{Top}_{\text{rel}}$ . . . . .	9
1.3	Les axiomes d'Eilenberg - Steenrod . . . . .	13
1.4	Conséquences des axiomes d'Eilenberg - Steenrod . . . . .	15
1.5	Application du théorème de Mayer - Vietoris . . . . .	15
1.5.1	Suspensions . . . . .	15
1.5.2	Sphères . . . . .	16
1.6	Démonstration du théorème de Mayer - Vietoris . . . . .	17
<b>2</b>	<b><math>H</math>-espaces et co-<math>H</math>-espaces</b>	<b>21</b>
2.1	$H$ -espaces . . . . .	21
2.2	Co- $H$ -espaces . . . . .	25
2.3	Le cas abélien . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Suites exactes de Puppe</b>	<b>33</b>
3.1	Le cas absolu . . . . .	33
3.2	Le cas relatif . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Cofibrations et extensions d'homotopies</b>	<b>45</b>
4.1	Définition, caractérisation et exemples . . . . .	45
4.2	Propriétés . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Introduction aux CW-complexes</b>	<b>51</b>
5.1	Définitions et propriétés fondamentales . . . . .	51
5.2	HELP et ses conséquences . . . . .	54
5.3	Approximation cellulaire . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Homologie</b>	<b>59</b>
6.1	Produit symétrique infini . . . . .	59
6.2	Propriétés de SP . . . . .	61
6.3	Définition de l'homologie . . . . .	63
6.3.1	Le cas pointé . . . . .	63
6.3.2	Le cas relatif . . . . .	67

## **Introduction**

**Définition.** Ce polycopié est la retranscription des notes du cours d'homotopie et homologie donné par le professeur K. HESS-BELLWALD durant le semestre d'automne 2012.

**Corollaire.** Malgré de nombreuses relectures, des erreurs peuvent subsister... ce polycopié est donc fourni sans garantie!

# Chapitre 1

## Une introduction axiomatique à l'homologie

### 1.1 Éléments de la théorie des catégories

**1.1.1 Définition** (Catégorie). Une **catégorie**  $\mathbf{C}$  est constituée des éléments suivants :

- Une classe  $\text{Obj } \mathbf{C}$  appelée les **objets de**  $\mathbf{C}$ ,
- Pour chaque paire  $X, Y \in \text{Obj } \mathbf{C}$ , une classe  $\mathbf{C}(X, Y)$  de **morphismes de**  $X$  **vers**  $Y$ ,
- Pour tout  $X, Y, Z \in \text{Obj } \mathbf{C}$ , une fonction de composition associative :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(X, Y) \times \mathbf{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathbf{C}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

que l'on peut représenter par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{g \circ f} & \downarrow g \\ & & Z \end{array},$$

- Pour tout  $X \in \text{Obj } \mathbf{C}$ , un unique morphisme  $\text{Id}_X$  appelé le morphisme identité et qui est tel que :

$$f \circ \text{Id}_X = f \quad \text{et} \quad \text{Id}_Y \circ f = f, \quad \forall f \in \mathbf{C}(X, Y).$$

**1.1.2 Notation.** • Si  $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ , alors on note  $f : X \rightarrow Y$  ou encore  $X \xrightarrow{f} Y$ ,

- La classe des morphismes de  $\mathbf{C}$  est notée :

$$\text{Mor } \mathbf{C} = \bigcup_{X, Y \in \text{Obj } \mathbf{C}} \mathbf{C}(X, Y).$$

**1.1.3 Exemples.** 1. On note  $\mathbf{Set}$  la catégorie des ensembles. On a que  $\text{Obj } \mathbf{Set}$  est la classe de tous les ensembles et que si  $X, Y \in \text{Obj } \mathbf{Set}$ , alors  $\mathbf{Set}(X, Y)$  est la classe des fonctions de  $X$  vers  $Y$ . La composition est la composition de fonctions usuelle. Le morphisme identité est la fonction identité usuelle.

2. On note **Top** la catégorie des espaces topologiques. On a que  $\text{Obj Top}$  est la classe de tous les espaces topologiques et que si  $X, Y \in \text{Obj Top}$ , alors  $\text{Top}(X, Y)$  est la classe des fonctions continues de  $X$  vers  $Y$ .
3. On note **Top\*** la catégorie des espaces topologiques pointés. On a que  $\text{Obj Top}_*$  est la classe de tous les espaces topologiques pointés et que si  $X, Y \in \text{Obj Top}_*$ , alors  $\text{Top}_*(X, Y)$  est la classe des fonctions continues pointés de  $X$  vers  $Y$ .
4. On note **Grp** la catégorie des groupes.
5. On note **Ab** la catégorie des groupes abéliens.
6. Soit  $G$  un groupe. On note **G** la catégorie qui est telle que  $\text{Obj G} = \{*\}$  et que  $\mathbf{G}(*, *) = G$ . La composition est alors  $a \circ b = ab$  pour tout  $a, b \in \mathbf{G}(*, *)$ . L'identité est  $\text{Id}_* = \text{Id}_G$ .

**1.1.4 Définition (Foncteur).** Soient **C** et **D** deux catégories. Un **foncteur**  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  est défini par deux fonctions :

$$\begin{aligned} F_0 : \text{Obj } \mathbf{C} &\longrightarrow \text{Obj } \mathbf{D} \\ F_1 : \text{Mor } \mathbf{C} &\longrightarrow \text{Mor } \mathbf{D} \end{aligned}$$

telles que :

- Pour tout  $X, Y \in \text{Obj } \mathbf{C}$ , on a  $F_1 : \mathbf{C}(X, Y) \rightarrow \mathbf{D}(F_0(X), F_0(Y))$ ,
- Pour tout  $X, Y, Z \in \text{Obj } \mathbf{C}$  et pour tout morphismes  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$ , on a  $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$ ,
- Pour tout  $X \in \text{Obj } \mathbf{C}$ , on a  $F_1(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F_0(X)}$ .

**1.1.5 Exemples.** 1. Le groupe fondamental  $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ .

2. Le **foncteur oublie**

$$\begin{aligned} U : \mathbf{Grp} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ U_0 : G &\longmapsto G \\ U_1 : f &\longmapsto f \end{aligned}$$

qui "oublie" la structure de groupe. On peut définir de même les foncteurs suivants :

$$\begin{aligned} U : \mathbf{Ab} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ U : \mathbf{Top} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ U : \mathbf{Top}_* &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ U : \mathbf{Ab} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ U : \mathbf{Top}_* &\longrightarrow \mathbf{Top}. \end{aligned}$$

3. Le foncteur "discret" :

$$\begin{aligned} D : \mathbf{Set} &\longrightarrow \mathbf{Top} \\ D_0 : X &\longmapsto (X, \mathcal{T}_{\text{disc}}) \\ D_1 : f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

**1.1.6 Définition (Diagramme commutatif).** Soit **C** une catégorie. Soient  $A, B, C, D \in \text{Obj } \mathbf{C}$  et  $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C, i : C \rightarrow D, j : B \rightarrow D$  des morphismes tels que  $j \circ f = i \circ g$ . Alors on

dit que le diagramme suivant **commute** :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{i} & D \end{array}$$

**1.1.7 Définition** (Pushout). Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie. Soit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

Soit  $P \in \text{Obj } \mathbf{C}$  et  $i : C \rightarrow P$ ,  $j : B \rightarrow P$  des morphismes tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{i} & P \end{array}$$

On dit que  $P, i, j$  est un **pushout** de  $A, B, C, f, g$  si  $\forall P' \in \text{Obj } \mathbf{C}$ ,  $\forall i' : C \rightarrow P'$ ,  $\forall j' : B \rightarrow P'$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow j' \\ C & \xrightarrow{i'} & P' \end{array}$$

alors il existe un unique morphisme  $u : P \rightarrow P'$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{i} & P \end{array} \begin{array}{c} \searrow j' \\ \downarrow u \\ \searrow i' \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ P' \end{array}$$

**1.1.8 Notation.** On note alors :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{i} & P \end{array}$$

ou encore :

$$P = B \coprod_A C.$$

**1.1.9 Exemples.** 1. Prenons la catégorie **Top** :

$$\begin{array}{ccc} (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{disc}}) & \hookrightarrow & I \\ x \mapsto * \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{exp} \\ \{*\} & \xrightarrow{* \mapsto (1, 0)} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

2. Prenons la catégorie **Ab** :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times m} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \end{array}$$

**1.1.10 Définition** (Pullback). Soit **C** une catégorie. Soit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

Soit  $P \in \text{Obj } \mathbf{C}$  et  $i : P \rightarrow C$ ,  $j : P \rightarrow B$  des morphismes tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j} & B \\ i \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

On dit que  $P, i, j$  est un **pullback** de  $A, B, C, f, g$  si  $\forall P' \in \text{Obj } \mathbf{C}, \forall i' : P' \rightarrow C, \forall j' : P' \rightarrow B$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{j'} & B \\ i' \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & A \end{array}$$

alors il existe un unique morphisme  $v : P' \rightarrow P$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 P' & & & & \\
 \swarrow & & \searrow^{j'} & & \\
 & P & \xrightarrow{j} & B & \\
 \downarrow i' & \downarrow i & & \downarrow f & \\
 & C & \xrightarrow{g} & A &
 \end{array}$$

**1.1.11 Notation.** On note alors :

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{j} & B \\
 \downarrow i & \lrcorner & \downarrow f \\
 C & \xrightarrow{g} & A
 \end{array}$$

**1.1.12 Exemple.** Prenons la catégorie **Top** :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{(x,y) \mapsto y} & \mathbb{R} \\
 \downarrow (x,y) \mapsto x & \lrcorner & \downarrow y \mapsto 1-y^2 \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{x \mapsto x^2} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

## 1.2 Invariants homotopiques

**1.2.1 Définition.** On définit la catégorie  $\mathbf{Top}_{\text{rel}}$  par :

- Objets : Couples d'espaces topologiques  $(X, A)$  où  $A$  est un sous espace de  $X$ ,
- Morphismes :  $f \in \mathbf{Top}_{\text{rel}}((X, A), (Y, B))$  si  $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$  et si  $f(A) \subseteq B$ ,
- On utilise la composition et l'identité usuelle.

Sous catégories importantes :

- $\mathbf{Top}_*$  : On restreint la classe des objets aux couples  $(X, \{x_0\})$  avec  $x_0 \in X$ . Les morphismes deviennent les applications basées.
- $\mathbf{Top}$  : On restreint la classe des objets aux couples  $(X, \emptyset)$ . Les morphismes deviennent les applications continues.

### 1.2.1 Homotopie dans $\mathbf{Top}_{\text{rel}}$

**1.2.2 Définition (Homotopie).** Soient  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Une **homotopie de  $f$  vers  $g$**  est un morphisme de  $\mathbf{Top}_{\text{rel}}$

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

tel que  $H(x, 0) = f(x)$  et  $H(x, 1) = g(x)$  pour tout  $x \in X$ .

**1.2.3 Remarque.**  $H$  étant un morphisme, on a que  $H(a, t) \in B, \forall a \in A, \forall t \in I$ .

Cas spéciaux :

- Si  $A = \{x_0\}, B = \{y_0\}$ , alors on parle d'**homotopie basée**.
- Si  $A, B = \emptyset$  alors on parle juste d'homotopie (absolue).

**1.2.4 Proposition.** La relation sur  $\mathbf{Top}_{\text{rel}}((X, A), (Y, B))$  donnée par l'homotopie est une relation d'équivalence.

Cette proposition justifie l'introduction de :

**1.2.5 Notations.** On note  $\simeq_A$  la relation donnée par l'homotopie sur  $\mathbf{Top}_{\text{rel}}((X, A), (Y, B))$ . Le quotient est noté

$$[(X, A), (Y, B)] = \mathbf{Top}_{\text{rel}}((X, A), (Y, B)) / \simeq_A .$$

La classe d'un morphisme  $f$  est noté  $[f]$ .

**1.2.6 Notations** (Abus de). Dans le cas où  $A = \{x_0\}$  et  $B = \{y_0\}$ , on note  $\simeq_*$  pour  $\simeq_A$ ,  $[f]_*$  pour  $[f]$  et  $[X, Y]_*$  pour  $[(X, A), (Y, B)]_*$ .

On va utiliser cette notion d'homotopie pour formuler une relation d'équivalence sur les espaces qui les classifera "à déformation continue près".

**1.2.7 Définition** (Équivalence d'homotopie, type d'homotopie). Un morphisme  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une **équivalence d'homotopie** s'il admet un inverse à homotopie près :  $\exists g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  tel que

$$g \circ f \simeq_A \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g \simeq_B \text{Id}_Y .$$

Deux objets  $(X, A), (Y, B) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}$  ont le même **type d'homotopie** s'il existe une équivalence d'homotopie qui les relie. On note alors  $(X, A) \simeq (Y, B)$ .

Le but de la théorie de l'homotopie est de classer tous les types d'homotopie en utilisant les invariants homotopiques.

**1.2.8 Définition** (Invariant homotopique). Un foncteur  $F : \mathbf{Top}_{\text{rel}} \rightarrow \mathbf{C}$  est un **invariant homotopique** si  $\forall f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  on a  $f \simeq_A g \implies F(f) = F(g)$ .

**1.2.9 Proposition.** Si  $F : \mathbf{Top}_{\text{rel}} \rightarrow \mathbf{C}$  est un invariant homotopique, alors  $(X, A) \simeq (Y, B) \implies F(X, A) \cong F(Y, B)$ .

Démonstration. Si  $(X, A) \simeq (Y, B)$ , alors  $\exists f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un équivalence d'homotopie d'inverse homotopique  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ . Ainsi  $g \circ f \simeq_A \text{Id}_X$  et  $f \circ g \simeq_B \text{Id}_Y$ . Puisque  $F$  est un invariant homotopique, on a :

$$\begin{aligned} \text{Id}_{F(X, A)} &= F(\text{Id}_{(X, A)}) = F(\text{Id}_X) \\ &= F(g \circ f) = F(g) \circ F(f). \end{aligned}$$

De même,  $\text{Id}_{F(Y, B)} = F(f) \circ F(g)$ . Ainsi,  $F(X, A) \cong F(Y, B)$ . □

**1.2.10 Propriété.** Si  $F$  est un invariant homotopique, alors :

$$F(X, A) \not\cong F(Y, B) \implies (X, A) \not\simeq (Y, B).$$

Car particuliers :

- **Invariants homotopiques basés** :  $F : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{C}$  avec  $f \simeq_* g \implies F(f) = F(g)$ .
- Invariants homotopiques (absolus) :  $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{C}$  avec  $f \simeq g \implies F(f) = F(g)$ .

**1.2.11 Exemple.**

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbf{Top}_* &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ (X, x_0) &\longmapsto \pi_1(X, x_0) = [(I, \{0, 1\}), (X, \{x_0\})] \end{aligned}$$

est un invariant homotopique basé.

**1.2.12 Proposition.** La composition d'applications continues induit une application bien définie :

$$\begin{aligned} [(X, A), (Y, B)] \times [(Y, B), (Z, C)] &\longrightarrow [(X, A), (Z, C)] \\ ([f], [g]) &\longmapsto [g \circ f]. \end{aligned}$$

Démonstration. *A voir : si  $f \simeq_A f'$  et  $g \simeq_B g'$ , alors  $g \circ f \simeq_A g' \circ f'$ . Soient  $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  une homotopie de  $f$  vers  $f'$  et  $K : (Y \times I, B \times I) \rightarrow (Z, C)$  une homotopie de  $g$  vers  $g'$ . Observer que  $g \circ H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Z, C)$  est une homotopie de  $g \circ f$  vers  $g \circ f'$  car  $g \circ H(x, 0) = g \circ f(x)$  et  $g \circ H(x, 1) = g \circ f'(x)$  pour tout  $x \in X$ . Pour conclure, il faut une homotopie de  $g \circ f$  vers  $g' \circ f'$ . Définissons  $K' : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Z, C)$  par  $K'(x, t) = K(f'(x), t)$ . Elle est évidemment continue. Par ailleurs,  $K'(a, t) \in C$  pour tout  $a \in A$  et  $t \in I$ . Donc  $K'$  est bien un morphisme de  $\mathbf{Top}_{\text{rel}}$ . Enfin,  $K'(x, 0) = K(f(x), 0) = g \circ f(x)$  et  $K'(x, 1) = K(f'(x), 1) = g' \circ f'(x)$ . Donc on a :*

$$g \circ f \simeq_A g \circ f' \simeq_A g' \circ f'.$$

□

**1.2.13 Corollaire.** 1.  $\forall f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , il existe une application bien définie

$$\begin{aligned} f^* : [(Y, B), (Z, C)] &\longrightarrow [(X, A), (Z, C)] \\ [g] &\longmapsto [g \circ f]. \end{aligned}$$

De plus,  $f \simeq_A f' \implies f^* = (f')^*$ .

2.  $\forall g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ , il existe une application bien définie

$$\begin{aligned} g_* : [(X, A), (Y, B)] &\longrightarrow [(X, A), (Z, C)] \\ [f] &\longmapsto [g \circ f]. \end{aligned}$$

De plus,  $g \simeq_B g' \implies g_* = g'_*$ .

Démonstration. 1. *Considérons*

$$\begin{aligned} \psi_f : [(Y, B), (Z, C)] &\longrightarrow [(X, A), (Y, B)] \times [(Y, B), (Z, C)] \\ [g] &\longmapsto ([f], [g]). \end{aligned}$$

On a  $f^* : [g] \xrightarrow{\psi_f} ([f], [g]) \longmapsto [g \circ f]$ . Puis  $f \simeq_A f' \implies [f] = [f'] \implies [g \circ f] = [g \circ f'] \implies f^* = (f')^*$ .

2. *De même...*

□

**1.2.14 Corollaire.** Pour tout objet  $(X, A) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}$ , il existe un invariant homotopique :

$$\begin{aligned} [(X, A), -] : \mathbf{Top}_{\text{rel}} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ (Y, B) &\longmapsto [(X, A), (Y, B)] \\ \left( (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C) \right) &\longmapsto \left( [(X, A), (Y, B)] \xrightarrow{g_*} [(X, A), (Z, C)] \right). \end{aligned}$$

Démonstration. • Nous avons déjà vu que  $g \simeq_B g' \implies g_* = g'_*$ .

- $[(X, A), -]$  est un foncteur car :
  - $\forall g : (Y, B) \longrightarrow (Z, C), \forall h : (Z, C) \longrightarrow (W, D), \forall [f] \in [(X, A), (Y, B)],$  on a que :

$$\begin{aligned} (h \circ g)_*([f]) &= [h \circ g \circ f] = h_* \circ g_*([f]) \\ \implies (h \circ g)_* &= h_* \circ g_*, \end{aligned}$$

- $\forall (Y, B) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}, \forall [f] \in [(X, A), (Y, B)]$  on a que :

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{(Y, B)})_*([f]) &= (\text{Id}_Y)_*([f]) = [f]_* = \text{Id}_{[(X, A), (Y, B)]}([f]) \\ \implies (\text{Id}_{(Y, B)})_* &= \text{Id}_{[(X, A), (Y, B)]}. \end{aligned}$$

□

**1.2.15 Exemple.** Soient  $(\mathbb{S}^1, 1)$  et  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 1))$ . Alors on sait que  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  et que  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 1)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Observons que dans **Grp**,  $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mais que dans **Set**,  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Ainsi, la structure de groupe rend l'invariant plus fort.

On verra plus tard pour quel type d'espace  $(X, A)$  l'ensemble  $[(X, A), (Y, B)]$  admet une structure de groupe naturelle. On verra par exemple que  $[(\mathbb{S}^n, \{z_0\}), (Y, \{y_0\})]$  admet toujours une structure de groupe. Il est même abélien si  $n \geq 2$ .

**1.2.16 Définition** (Groupes d'homotopie supérieurs). Le  $n$ -ième groupe d'homotopie est défini par le foncteur :

$$\begin{aligned} \pi_n : \mathbf{Top}_* &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ (Y, y_0) &\longmapsto [(\mathbb{S}^n, \{z_0\}), (Y, y_0)]. \end{aligned}$$

**1.2.17 Exercice.** Montrer que  $[(\mathbb{S}^1, 1), (Y, y_0)] \cong [(I, \{0, 1\}), (Y, \{y_0\})]$ .

**1.2.18 Définition** (Équivalence faible). On dit qu'un morphisme de  $\mathbf{Top}_*$  est une **équivalence faible** si  $\forall n \geq 1$ , le morphisme  $\pi_n(g) = \pi_n g$  est un isomorphisme.

**1.2.19 Remarque.** Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible. En revanche, une équivalence faible n'est en général pas une équivalence d'homotopie. On verra cependant en fin de semestre que si  $Y$  et  $Z$  sont des **CW-complexes**, alors toute équivalence faible entre  $Y$  et  $Z$  est une équivalence d'homotopie...

**1.2.20 Remarque.** Les foncteurs  $\pi_n$  sont en général TRÈS difficiles à calculer. Par exemple,  $\pi_n(\mathbb{S}^m, \{z_0\})$  n'est connu que pour un nombre fini de couples  $(n, m)$ ...

Le but du cours est d'étudier une approximation aux groupes d'homotopie : les groupes d'homologie d'un espace basé. Leur définition est plus compliquée (comme vous allez avoir le plaisir de constater) mais leur calcul sont plus simples. L'idée est la suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Top}_{\text{rel}} & \xrightarrow{C} & \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{SP} & \mathbf{Top}_* \\ & \searrow & & \searrow & \downarrow \pi_n, n \geq 2 \\ & & & & \mathbf{Ab} \\ & & & \nearrow \tilde{H}_n & \\ & & & \nearrow H_n & \end{array}$$

où  $C$  est le cône,  $SP$  est le produit symétrique infini,  $\tilde{H}_n$  est le  $n$ -ième groupe d'homologie réduit et  $H_n$  est le  $n$ -ième groupe d'homologie relative.

### 1.3 Les axiomes d'Eilenberg - Steenrod

Le but est de donner une liste d'axiomes qui caractérisent complètement l'homologie relative et qui nous permettent de faire des calculs.

Pour commencer, une notion algébrique essentielle :

**1.3.1 Définition** (Suite exacte). Une **suite exacte** de groupes abéliens est une suite

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

où  $A_n \in \text{Obj } \mathbf{Ab}, \forall n$  et où  $\text{Im } f_{n+1} = \ker f_n$ .

Voici un cas particulier :

**1.3.2 Définition** (Courte suite exacte). Une **courte suite exacte** est une suite exacte de la forme :

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0$$

Donc on a :

- $\text{Im } 0 = \{0\} = \ker f$ ,  $f$  est injective,
- $\text{Im } f = \ker g$ ,
- $\text{Im } g = \ker 0 = C$ ,  $g$  est surjective.

**1.3.3 Exemples.** •

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

•

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où  $f : \bar{m} \mapsto (\bar{m}, \bar{0})$  et  $g : (\bar{m}, \bar{n}) \mapsto \bar{n}$ .

**1.3.4 Notation.** Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathbf{Top}_{\text{rel}} &\longrightarrow \mathbf{Top}_{\text{rel}} \\ (X, \emptyset) &\longmapsto (X, A). \end{aligned}$$

**1.3.5 Définition** (Triade excissive). Soit  $X$  un espace topologique et  $A, B \subseteq X$  deux sous espaces tels que  $\bar{A} \cup \bar{B} = X$ . On appelle alors  $(X; A, B)$  une **triade excissive**.

**1.3.6 Définition** (Théorie d'homologie, théorie d'homologie ordinaire). Soit une famille d'invariants homotopiques  $\{E_n : \mathbf{Top}_{\text{rel}} \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \in \mathbb{N}}$  et une famille de transformations naturelles  $\{\partial_n : E_n \rightarrow E_{n-1} \circ \mathcal{U}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , i.e.  $\forall f : (X, A) \rightarrow (Y, B), \forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{array}{ccc} E_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1}(A, \emptyset) \\ E_n f \downarrow & & \downarrow E_{n-1} f|_A \\ E_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1}(B, \emptyset) \end{array}$$

Ces éléments forment une **théorie d'homologie** sur  $\mathbf{Top}_{\text{rel}}$  si les axiomes **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** ci-dessous sont satisfait. Cette théorie est **ordinaire** si l'axiome **(H5)** est aussi satisfait.

**1.3.7 Axiomes** (Eilenberg - Steenrod). **(H1)** Exactitude :  $\forall (X, A) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}$ , la suite suivante est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E_n(A, \emptyset) & \xrightarrow{E_n i} & E_n(X, \emptyset) & \xrightarrow{E_n j} & E_n(X, A) \\ & & & & & \searrow & \nearrow \\ & & & & & \partial_n & \\ & & & & & \nearrow & \searrow \\ & & E_{n-1}(A, \emptyset) & \xrightarrow{E_{n-1} i} & E_{n-1}(X, \emptyset) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où  $i : A \hookrightarrow X$  et  $j : \emptyset \hookrightarrow A$ .

**(H2)** Excision : Soit  $(X; A, B)$  une triade excissive. Alors l'inclusion  $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$  induit un isomorphisme

$$E_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} E_n(X, B).$$

**(H3)** Additivité : Pour toute collection d'objets disjoints  $\{(X_j, A_j)\}_{j \in \mathcal{J}} \subseteq \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}$ , les inclusions

$$\alpha_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow \left( \coprod_{j \in \mathcal{J}} X_j, \coprod_{j \in \mathcal{J}} A_j \right)$$

induisent un isomorphisme

$$\begin{aligned} \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} E_n(X_j, A_j) &\xrightarrow{\cong} E_n \left( \coprod_{j \in \mathcal{J}} X_j, \coprod_{j \in \mathcal{J}} A_j \right) \\ \sum_{j \in \mathcal{J}} e_j &\longmapsto \sum_{j \in \mathcal{J}} E_n(\alpha_j)(e_j). \end{aligned}$$

**(H4)** Invariance : Si  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une équivalence faible, alors  $E_n f : E_n(X, A) \rightarrow E_n(Y, B)$  est un isomorphisme.

**(H5)** Dimension :  $\exists G \in \text{Obj } \mathbf{Ab}$  tel que  $\forall (\{x\}, \emptyset) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}$

$$E_n(\{x\}, \emptyset) = \begin{cases} G & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

**1.3.8 Notations.** On peut noter une théorie d'homologie de la manière suivante :

$$\{E_n : \mathbf{Top}_{\text{rel}} \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \in \mathbb{N}} = E_*.$$

Par abus de notation :  $E_n(X, \emptyset) = E_n(X) = E_n X$ .

**1.3.9 Théorème.** Pour tout groupe abélien  $G$ , il existe une unique théorie d'homologie ordinaire qui vérifie l'axiome de dimension pour  $G$ .

Démonstration. *A venir...* □

Étant donné ce théorème, on peut introduire :

**1.3.10 Notation.** On note l'unique théorie d'homologie qui vérifie l'axiome de dimension pour  $G$  de la manière suivante :

$$\{H_n(-; G) : \mathbf{Top}_{\text{rel}} \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \in \mathbb{N}} = H_*(-; G).$$

## 1.4 Conséquences des axiomes d'Eilenberg - Steenrod

Comment faire des calculs à partir des axiomes ?  
 Soit  $E_*$  une théorie d'homologie.

**1.4.1 Théorème** (Mayer - Vietoris). Soit  $(X; A, B)$  une triade excisive. La suite suivante est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_n(A \cap B) & \xrightarrow{\psi_n} & E_n(A) \oplus E_n(B) & \xrightarrow{\phi_n} & E_n(X) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \delta_n \\ & & & & & & \swarrow \\ & & & & & & E_{n-1}(A \cap B) \\ & & & & & & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

où :

- $\psi_n(e) = (E_n i(e), E_n j(e))$  avec  $i : A \cap B \hookrightarrow A$  et  $j : A \cap B \hookrightarrow B$ ,
- $\phi_n(a, b) = E_n k(a) - E_n l(b)$  avec  $k : A \hookrightarrow X$  et  $l : B \hookrightarrow X$ ,
- $\delta_n$  est obtenu par composition :

$$\begin{array}{ccc} E_n(X, \emptyset) & \xrightarrow{E_n \mathcal{U}} & E_n(X, B) \cong E_n(A, A \cap B) \\ & \searrow \delta_n & \downarrow \partial_n \\ & & E_{n-1}(A \cap B) \end{array}$$

Pour rappel,  $E_n(X, B) \cong E_n(A, A \cap B)$  est obtenu par l'axiome d'excision.

*“Lorsque j'ai pour la première fois vu ce théorème, je faisais mon doctorat au MIT. Et quand je l'ai lu, j'ai pensé à Beethoven ! [Il est bon de préciser que notre professeur faisait partie du coeur du MIT] Il est vraiment GÉNIAL !”*

Prof. K. HESS-BELLWALD  
 Le 04/10/2012

## 1.5 Application du théorème de Mayer - Vietoris

Soit  $G$  un groupe abélien. Considérons la théorie d'homologie ordinaire  $H_*(-; G)$ .

### 1.5.1 Suspensions

**1.5.1 Rappel.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. La **suspension** de  $(X, \mathcal{T})$  est l'espace

$$\Sigma X = X \times I / [(x, 0) \sim (x', 0), (x, 1) \sim (x', 1)].$$

Posons  $A = X \times [0, 1] / [(x, 0) \sim (x', 0)]$  et  $B = X \times ]0, 1] / [(x, 1) \sim (x', 1)]$ . On a que  $(\Sigma X; A, B)$  forme une triade excisive. En effet,  $A$  et  $B$  sont ouverts dans  $\Sigma X$  et  $A \cup B = \Sigma X$ . De plus,  $A$  et  $B$  sont contractiles, donc  $A, B \simeq \{*\}$ , et  $A \cap B = X \times ]0, 1[ \simeq X$ . Par le théorème de Mayer - Vietoris, la suite

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X; G) & \longrightarrow & H_{n+1}(A; G) \oplus H_{n+1}(B; G) & \longrightarrow & H_{n+1}(\Sigma X; G) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \delta \\ & & & & & & \swarrow \\ & & & & & & H_n(X; G) \\ & & & & & & \longrightarrow H_n(A; G) \oplus H_n(B; G) \\ & & & & & & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

est exacte. Or  $H_n(A; G) \oplus H_n(B; G) = 0, \forall n > 0$  par l'axiome **(H5)**. Ainsi, on a :

- $n > 0$  : On a :

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(\Sigma X; G) \xrightarrow{\delta} H_n(X; G) \longrightarrow 0$$

et donc  $\delta$  est un isomorphisme.

- $n = 0$  : On a :

$$0 \longrightarrow H_1(\Sigma X; G) \xrightarrow{\delta} H_0(X; G) \longrightarrow G \oplus G \longrightarrow H_0(\Sigma X; G) \longrightarrow 0$$

et donc  $\delta$  est au moins injective.

### 1.5.2 Sphères

On va voir que :

$$H_n(\mathbb{S}^m; G) = \begin{cases} G \oplus G & \text{si } m = n = 0 \\ G & \text{si } m = n > 0, \text{ ou } m > 0, n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

- $m \in \{0, 1\}$  : On a que  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\} = \{-1\} \amalg \{1\}$ . Par l'axiome **(H3)**, on a que :

$$H_n(\mathbb{S}^0; G) \cong H_n(\{-1\}; G) \oplus H_n(\{1\}; G) = \begin{cases} G \oplus G & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour rappel,  $\Sigma \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{m+1}$ . Ainsi, par notre analyse des suspensions

$$H_{n+1}(\mathbb{S}^{m+1}; G) \cong H_{n+1}(\Sigma \mathbb{S}^m; G) \cong H_n(\mathbb{S}^m; G), \quad \forall n > 0.$$

Donc, il suffira de montrer que

$$H_n(\mathbb{S}^1; G) = \begin{cases} G & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

pour conclure que  $H_n(\mathbb{S}^n; G) \cong H_1(\mathbb{S}^1; G) \cong G, \forall n > 0$  et  $H_{n+k}(\mathbb{S}^n; G) \cong H_{1+k}(\mathbb{S}^1; G) = 0, \forall k > 0$ . Par ailleurs, si l'on sait que  $H_n(\mathbb{S}^m; G) = 0$  si  $n \neq 0$ , le théorème de Mayer - Vietoris nous dira que  $\forall n > 0$  :

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(\mathbb{S}^{m+1}; G) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{S}^m; G) \longrightarrow 0$$

et on pourra conclure que  $H_{n+1}(\mathbb{S}^{m+1}; G) = 0$  si  $n \neq m$ .

Considérons le cas  $\mathbb{S}^1$ . Posons  $N = (0, 1), E = (1, 0), S = (0, -1), W = (-1, 0)$  et  $A = \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}, B = \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$ . On considère que  $\mathbb{S}^0 = \{E, W\}$ . Alors  $A$  et  $B$  sont contractiles,  $A \cap B = \mathbb{S}^1 \setminus \{N, S\} \simeq \mathbb{S}^0$ . Par le théorème de Mayer - Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & H_1(\mathbb{S}^1; G) \\ & & & & & \searrow & \delta \\ & & & & & & \delta \\ & & & & & \swarrow & \\ & & & & & \longrightarrow & H_0(\mathbb{S}^1; G) \longrightarrow 0 \\ & & & & & \longleftarrow & \psi_0 \\ & & & & & \longleftarrow & H_0(A; G) \oplus H_0(B; G) \\ & & & & & \longleftarrow & H_0(\mathbb{S}^0; G) \end{array}$$

où  $\psi_0$  est induit par  $A \xrightarrow{i_A} X \xrightarrow{i_B} B$ . Or,  $H_0(\mathbb{S}^0; G) = H_0(A; G) \oplus H_0(B; G) = G \oplus G$ . Puis :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= H_0(i_A; G) \oplus H_0(i_B; G) \\ \implies \psi_0(g_1, g_2) &= H_0(i_A; G)(g_1, g_2) \oplus H_0(i_B; G)(g_1, g_2) \\ &\in H_0(A; G) \oplus H_0(B; G). \end{aligned}$$

On a les rétractions :

$$\begin{array}{ccc} \{E\} & \xleftarrow{e} & \mathbb{S}^0 \\ & \searrow r & \downarrow i_A \\ & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \{W\} & \xleftarrow{w} & \mathbb{S}^0 \\ & \searrow r' & \downarrow i_B \\ & & B \end{array}$$

De plus,  $r$  et  $r'$  sont des équivalences d'homotopies. Ainsi, on peut conclure que  $H_0(i_A; G)(g_1, g_2) = g_1 + g_2$ . De la même manière :  $H_0(i_B; G)(g_1, g_2) = g_1 + g_2$ . Donc :

$$\begin{aligned} \psi_0(g_1, g_2) &= (g_1 + g_2, g_1 + g_2) \\ \implies \ker \psi &= \{(g, -g) \mid g \in G\} \cong G. \end{aligned}$$

Or  $\text{Im } \delta = \ker \psi_0$  et  $\delta$  est injective. Donc  $H_1(\mathbb{S}^1; G) \cong G$ . Ainsi, la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{g \mapsto (g, -g)} G \oplus G \xrightarrow{\psi_0} G \oplus G \xrightarrow{\phi_0} H_0(\mathbb{S}^1; G) \longrightarrow 0$$

Donc  $\ker \phi_0 \cong G$  ce qui implique par premier théorème d'isomorphisme que  $(G \oplus G) / \ker \phi_0 \cong H_0(\mathbb{S}^1; G)$ .

- $m > 1$  : Par le théorème de Mayer - Vietoris, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & H_1(\mathbb{S}^m; G) \\ & & & & & \searrow & \delta \\ & & & & & & \delta \\ & & & & & \searrow & \delta \\ & & & & & \longrightarrow & H_0(\mathbb{S}^m; G) \longrightarrow 0 \\ & & & & & \longleftarrow & \delta \\ & & & & & \longleftarrow & \delta \\ & & & & & \longleftarrow & \delta \\ & & & & & \longrightarrow & H_0(\mathbb{S}^{m-1}; G) \xrightarrow{\psi_0} H_0(A; G) \oplus H_0(B; G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par un argument semblable au cas où  $m = 1$ , on a que  $\psi_0$  est injective et que  $H_1(\mathbb{S}^m; G) \cong 0$  ce qui entraîne que  $H_0(\mathbb{S}^m; G) \cong G$ .

## 1.6 Démonstration du théorème de Mayer - Vietoris

Soit  $E_*$  une théorie d'homologie (pas nécessairement ordinaire).

**1.6.1 Proposition.** Soient  $B \subset A \subset X$ . Alors la suite

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E_n(A, B) & \xrightarrow{E_n i} & E_n(X, B) & \xrightarrow{E_n j} & E_n(X, A) \\ & & & & & \searrow & \delta \\ & & & & & & \delta \\ & & & & & \searrow & \delta \\ & & & & & \longrightarrow & E_{n-1}(A, B) \xrightarrow{E_{n-1} i} \dots \end{array}$$

1.6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE MAYER - VIETORIS

---

est exacte, où  $i : A \hookrightarrow X$ ,  $j : B \hookrightarrow A$ ,  $\mathcal{U} : \emptyset \hookrightarrow B$  et

$$\begin{array}{ccc} E_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1}A \\ & \searrow \delta & \downarrow E_{n-1}\mathcal{U} \\ & & E_{n-1}(A, B) \end{array}$$

Démonstration. Allons chasser dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \longrightarrow & E_n B & \xrightarrow{E_n j} & E_n A & \xrightarrow{E_n \mathcal{U}^{AB}} & E_n(A, B) & \xrightarrow{\partial_n^{AB}} & E_{n-1} B & \xrightarrow{E_{n-1} j} & E_{n-1} A & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow E_n i & & \downarrow E_n i & & \parallel & & \downarrow E_{n-1} i & & \\ \dots & \longrightarrow & E_n B & \xrightarrow{E_n(i \circ j)} & E_n X & \xrightarrow{E_n \mathcal{U}^{XB}} & E_n(X, B) & \xrightarrow{\partial_n^{XB}} & E_{n-1} B & \xrightarrow{E_{n-1}(i \circ j)} & E_{n-1} X & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow E_n j & & \parallel & & \downarrow E_n j & & \downarrow E_{n-1} j & & \parallel & & \\ \dots & \longrightarrow & E_n A & \xrightarrow{E_n i} & E_n X & \xrightarrow{E_n \mathcal{U}^{XA}} & E_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^{XA}} & E_{n-1} A & \xrightarrow{E_{n-1} i} & E_{n-1} X & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \searrow \delta & & \downarrow E_{n-1} \mathcal{U}^{AB} & & \downarrow E_{n-1} \mathcal{U}^{XB} & & \\ & & & & & & & & E_{n-1}(A, B) & & & & \\ & & & & & & & & \searrow E_{n-1} i & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & & & E_{n-1}(X, B) & & \end{array}$$

$\text{Im } E_n j = \ker \delta$  : Montrons que  $\text{Im } E_n j \subseteq \ker \delta$ . On a :

$$\begin{aligned} \delta \circ E_n j &= E_{n-1} \mathcal{U}^{AB} \circ \partial_n^{XA} \circ E_n j \\ &= E_{n-1} \mathcal{U}^{AB} \circ E_{n-1} j \circ \partial_n^{XB} \\ &= 0 \end{aligned}$$

par l'axiome (H1).

Montrons maintenant l'inclusion inverse :  $\text{Im } E_n j \supseteq \ker \delta$ . Soit  $a \in \ker \delta$ . Alors !

$$\begin{aligned} E_{n-1} \mathcal{U}^{AB} \circ \partial_n^{XA}(a) &= 0 \\ \implies \partial_n^{XA}(a) &\in \ker E_{n-1} \mathcal{U}^{AB} = \text{Im } E_{n-1} j \\ \implies \exists b \in E_{n-1} B &\text{ tel que } E_{n-1} j(b) = \partial_n^{XA}(a). \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \text{Im } \partial_n^{XA} &= \ker E_{n-1} i \\ \implies 0 &= E_{n-1} i \circ \partial_n^{XA}(a) \\ &= E_{n-1} i \circ E_{n-1} j(b) \\ &= E_{n-1}(i \circ j)(b). \end{aligned}$$

Ainsi,  $b \in \ker E_{n-1}(i \circ j) = \text{Im } \partial_n^{XB}$ . Donc  $\exists c \in E_n(X, B)$  tel que  $\partial_n^{XB}(c) = b$ . Puis :

$$\begin{aligned}
 \partial_n^{XA}(a - E_n j(c)) &= \partial_n^{XA}(a) - \partial_n^{XA} \circ E_n j(c) \\
 &= \partial_n^{XA}(a) - E_{n-1} j \circ \partial_n^{XB}(c) \\
 &= 0 \\
 \implies a - E_n j(c) &\in \ker \partial_n^{XA} = \text{Im } E_n \mathcal{U}^{XA} = \text{Im } E_n j \circ E_n \mathcal{U}^{XB} \\
 \implies \exists d \in E_n X &\text{ tel que } a - E_n j(c) = E_n j \circ E_n \mathcal{U}^{XB}(d) \\
 \implies a &= E_n j(c + E_n \mathcal{U}^{XB}(d)) \\
 \implies a &\in \text{Im } E_n j.
 \end{aligned}$$

$\text{Im } \delta = \ker E_{n-1} i$  : Montrons que  $\text{Im } \delta \subseteq \ker E_{n-1} i$ . On a :

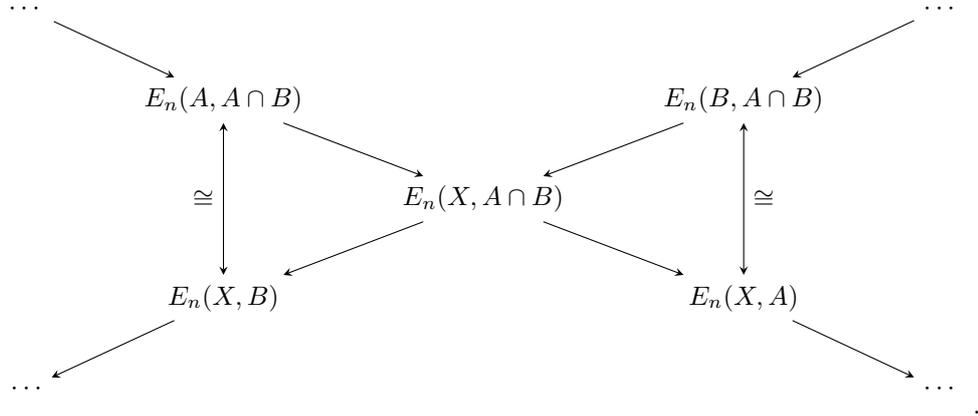
$$\begin{aligned}
 E_{n-1} i \circ \delta &= E_{n-1} i \circ E_{n-1} \mathcal{U}^{AB} \circ \partial_n^{XA} \\
 &= E_{n-1} \mathcal{U}^{XB} \circ E_{n-1} i \circ \partial_n^{XA} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

par l'axiome **(H1)**.

Montrons maintenant l'inclusion inverse :  $\text{Im } \delta j \supseteq \ker E_{n-1} i$ . □

**1.6.2 Proposition.** Soit  $(X; A, B)$  une triade excisive. Alors l'homomorphisme  $E_n(A, A \cap B) \oplus E_n(B, A \cap B) \rightarrow E_n(X, A \cap B)$  induit par les inclusions  $A \hookrightarrow X$  et  $B \hookrightarrow X$  est un isomorphisme.

Démonstration. On sait que  $A \cap B \subset A \subset X$  et que  $A \cap B \subset B \subset X$ . Donc par la proposition précédente :



Ainsi, on obtient une suite scindée :

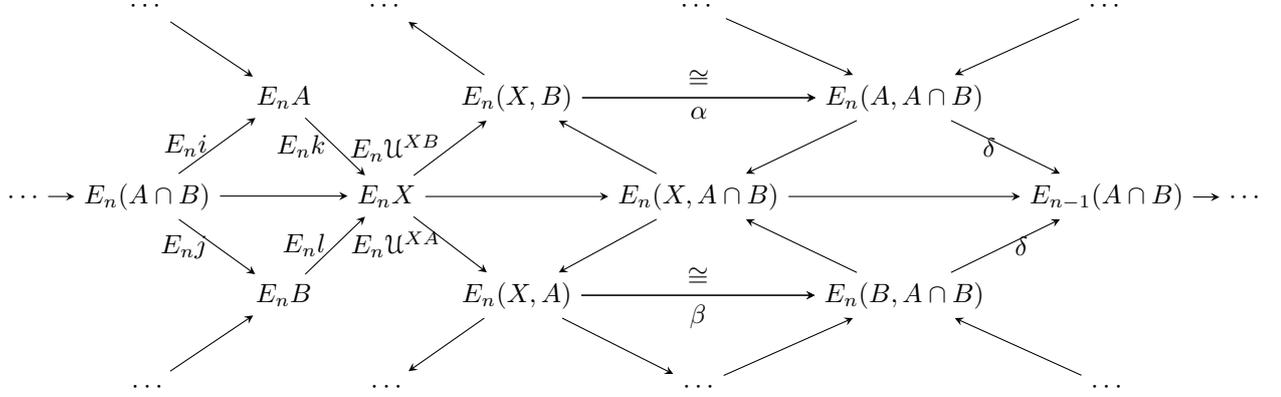
$$\dots \longrightarrow E_n(A, A \cap B) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} E_n(X, A \cap B) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} E_n(B, A \cap B) \longrightarrow \dots$$

Par l'exercice 2 de la série 3 on a  $E_n(A, A \cap B) \oplus E_n(B, A \cap B) \cong E_n(X, A \cap B)$ . □

1.6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE MAYER - VIETORIS

---

Démonstration : Théorème de Mayer - Vietoris, grandes idées. *Considérons le diagramme suivant :*



avec  $\delta_n = \delta \circ \beta \circ E_n \mathcal{U}^{XB}$  et  $-\delta_n = \delta \circ \alpha \circ E_n \mathcal{U}^{XA}$ . Quelques arguments d'exactitude :

$\text{Im } \psi_n \subset \ker \phi_n$  : On a que :

$$\begin{aligned} \phi_n \circ \psi_n &= (E_n k - E_n l) \circ (E_n i, E_n j) \\ &= E_n(k \circ i) - E_n(l \circ j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\text{Im } \phi_n \subset \ker \delta_n$  : Soit  $(a, b) \in E_n A \oplus E_n B$ . Alors  $\phi_n(a, b) = E_n k(a) - E_n l(b) \in E_n X$ . Or :

$$\begin{aligned} \delta_n \circ E_n k &= -(\delta \circ \alpha \circ E_n \mathcal{U}^{XA}) \circ E_n k \\ &= -\delta \circ \alpha \circ (E_n \mathcal{U}^{XA} \circ E_n k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière  $\delta_n \circ E_n l = 0$ . Donc  $\delta \circ (E_n k(a) - E_n l(b)) = 0$  ce qui implique que  $\text{Im } \phi_n \subset \ker \delta_n$ .

$\text{Im } \delta_n \subset \ker \psi_{n-1}$  : On a que  $\delta_n = \delta \circ \beta \circ E_n \mathcal{U}^{XB}$  et donc  $\text{Im } \delta_n \subset \text{Im } \delta$ . Or  $\text{Im } \delta = \ker E_{n-1} i$ . Donc  $E_{n-1} i \circ \delta = 0$  ce qui implique que  $E_{n-1} i \circ \delta_n = 0$ . De même :  $E_{n-1} j \circ \delta_n = 0$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \psi_n \circ \delta_n &= (E_{n-1} i \circ \delta_n, E_{n-1} j \circ \delta_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est laissé en maxi-exercice... □

# Chapitre 2

## $H$ -espaces et co- $H$ -espaces

Le but est de caractériser les espaces  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathbf{Top}_*$  tels que  $[(X, x_0), (Z, z_0)]_*$  et  $[(W, w_0), (Y, y_0)]_*$  admettent des structures de groupe naturelles pour tout  $(W, w_0), (Z, z_0) \in \mathbf{Top}_*$ . On obtient des invariants homotopiques  $[-, (Y, y_0)]_*$  et  $[(X, x_0), -]_*$  plus puissants.

### 2.1 $H$ -espaces

**2.1.1 Rappel.** Un groupe consiste en un ensemble  $G$  et 3 applications

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ \sigma : G &\longrightarrow G \\ \eta : \{*\} &\longrightarrow G \end{aligned}$$

telle que les diagrammes suivants commutent :

1. Associativité

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}_G} & G \times G \\ \text{Id}_G \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array},$$

2. Élément neutre

$$\begin{array}{ccc} G \times \{*\} & \xrightarrow{\text{Id}_G \times \eta} & G \times G & \xleftarrow{\eta \times \text{Id}_G} & \{*\} \times G \\ & \searrow \cong & \downarrow \mu & \swarrow \cong & \\ & & G & & \end{array},$$

3. Élément inverse

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xleftarrow{\text{Id}_G \times \sigma} & G \times G & \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}_G} & G \times G \\ \mu \downarrow & & \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ G & \xleftarrow{\eta} & \{*\} & \xleftarrow{\varepsilon} & G & \xrightarrow{\varepsilon} & \{*\} & \xrightarrow{\eta} & G \end{array}$$

ou  $\varepsilon$  est l'unique application  $G \longrightarrow \{*\}$ .

Soit  $(Y, y_0) \in \mathbf{Top}_{\text{rel}}$  un espace tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{[-, (Y, y_0)]_*} & \mathbf{Set} \\ & \searrow \exists & \nearrow U \\ & \mathbf{Grp} & \end{array}$$

Ainsi,  $[-, (Y, y_0)]_*$  peut être vu comme un foncteur vers  $\mathbf{Grp}$ . On peut donc définir une structure de groupe à homotopie près sur  $Y$  comme suit :

1. Multiplication :  $[(Y \times Y, (y_0, y_0)), (Y, y_0)]_*$  est un groupe par hypothèse. Puis,  $[\text{proj}_1]_*, [\text{proj}_2]_* \in [(Y \times Y, (y_0, y_0)), (Y, y_0)]_*$ . Donc  $[\text{proj}_1]_* \cdot [\text{proj}_2]_*$  a un sens et est un élément du groupe. Par conséquent, il existe une application basée  $\mu : (Y \times Y, (y_0, y_0)) \rightarrow (Y, y_0)$  (non nécessairement unique) telle que :

$$[\mu]_* = [\text{proj}_1]_* \cdot [\text{proj}_2]_*.$$

2. Element neutre : il existe une unique application  $\eta : (\{*\}, *) \rightarrow (Y, y_0)$ .
3. Inversion :  $[(Y, y_0), (Y, y_0)]_*$  est un groupe par hypothèse et  $[\text{Id}_Y]_*$  en est un élément. Donc  $[\text{Id}_Y]_*^{-1}$  a un sens et est un élément du groupe. Donc il existe une application basée  $\sigma : (Y, y_0) \rightarrow (Y, y_0)$  (non nécessairement unique) telle que :

$$[\sigma]_* = [\text{Id}_Y]_*^{-1}.$$

**2.1.2 Proposition.** Avec les notations ci-dessus, les diagrammes suivants commutent à homotopie près :

- 1.

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y \times Y & \xrightarrow{\mu \times \text{Id}_Y} & Y \times Y \\ \text{Id}_Y \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ Y \times Y & \xrightarrow{\mu} & Y \end{array},$$

- 2.

$$\begin{array}{ccccc} Y \times \{*\} & \xrightarrow{\text{Id}_Y \times \eta} & Y \times Y & \xleftarrow{\eta \times \text{Id}_Y} & \{*\} \times Y \\ & \searrow \cong & \downarrow \mu & \nearrow \cong & \\ & & Y & & \end{array},$$

- 3.

$$\begin{array}{ccccccc} Y \times Y & \xleftarrow{\text{Id}_Y \times \sigma} & Y \times Y & \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}_Y} & Y \times Y & & \\ \mu \downarrow & & \Delta \uparrow & & \downarrow \mu & & \\ Y & \xleftarrow{\eta} & \{*\} & \xleftarrow{\varepsilon_Y} & Y & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & \{*\} \xrightarrow{\eta} Y \end{array}$$

ou  $\varepsilon_Y$  est l'unique application basée  $(Y, y_0) \rightarrow (\{*\}, *)$ .

Démonstration. *A venir...*

□

**2.1.3 Définition** ( $H$ -espace,  $H$ -espace associatif,  $H$ -groupe). Un espace basé  $(Y, y_0)$  muni d'applications basées  $\eta : (\{*\}, *) \rightarrow (Y, y_0)$  et  $\mu : (Y \times Y, (y_0, y_0)) \rightarrow (Y, y_0)$  telle  $\eta$  soit un élément neutre pour  $\mu$  à homotopie près est un  **$H$ -espace**. Si de plus  $\mu$  est associative à homotopie près, alors  $(Y, y_0)$  est un  **$H$ -espace associatif**. Si on a de plus une application basée  $\sigma : (Y, y_0) \rightarrow (Y, y_0)$  qui est un inverse pour  $\mu$  et  $\eta$  à homotopie près, alors  $(Y, y_0)$  est un  **$H$ -groupe**.

**2.1.4 Notation.** On note les  $H$ -espaces  $(Y, y_0, \eta, \mu)$  et les  $H$ -groupes  $(Y, y_0, \eta, \mu, \sigma)$ .

**2.1.5 Définition** ( $H$ -morphisme). Soient  $(Y, y_0, \eta, \mu)$  et  $(Y', y'_0, \eta', \mu')$  deux  $H$ -espaces. Alors un  **$H$ -morphisme**  $f : (Y, y_0, \eta, \mu, \sigma) \rightarrow (Y', y'_0, \eta', \mu', \sigma')$  est une application continue basée  $f : (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$  telle que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{f \times f} & Y' \times Y' \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ Y & \xrightarrow{f} & Y' \end{array}$$

Si  $(Y, y_0, \eta, \mu, \sigma)$  et  $(Y', y'_0, \eta', \mu', \sigma')$  donc des  $H$ -groupes, alors  $f$  doit de plus faire commuter ce diagramme à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma' \\ Y & \xrightarrow{f} & Y' \end{array}$$

**2.1.6 Lemme.** Pour tout  $(X, x_0) \in \text{Obj Top}_*$ , l'élément neutre du groupe  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$  est  $[\eta \circ \varepsilon_X]_*$  où  $\varepsilon_X : X \rightarrow \{*\}$  et  $\eta : (\{*\}, *) \rightarrow (Y, y_0)$ .

Démonstration. • L'ensemble  $[(\{*\}, *), (Y, y_0)]_*$  est un groupe par hypothèse sur  $(Y, y_0)$ . Or, la seule application basée de  $(\{*\}, *)$  vers  $(Y, y_0)$  est  $\eta$ . Donc  $[(\{*\}, *), (Y, y_0)]_*$  admet pour élément neutre  $[\eta]_* = [\eta \circ \varepsilon_{\{*\}}]_*$ .

• Par ailleurs,  $\forall (X, x_0)$ , l'application  $\varepsilon_X$  est basée et donc induit un homomorphisme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_X^* : [(\{*\}, *), (Y, y_0)]_* &\longrightarrow [(X, x_0), (Y, y_0)]_* \\ [g]_* &\longmapsto [g \circ \varepsilon_X]_* \end{aligned}$$

En particulier,  $\varepsilon_X^*$  préserve l'élément neutre. Donc  $\varepsilon_X^*([\eta]_*) = [\eta \circ \varepsilon_X]_*$  est l'élément neutre de  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$ . □

Démonstration de la proposition 2.1.2. 1. *Laissé en exercice...*

2. On doit montrer que  $\mu \circ (\eta \times \text{Id}_Y) \simeq_* \text{Id}_Y \simeq_* \mu \circ (\text{Id}_Y \times \eta)$ . Autrement dit, on veut montrer que  $[\mu \circ (\eta \times \text{Id}_Y)]_* = [\text{Id}_Y]_* = [\mu \circ (\text{Id}_Y \times \eta)]_*$ . Or :

$$\begin{aligned} [\mu \circ (\eta \times \text{Id}_Y)]_* &= (\eta \times \text{Id}_Y)^*([\mu]_*) \\ &= (\eta \times \text{Id}_Y)^*([\text{proj}_1]_* \cdot [\text{proj}_2]_*) \\ &= (\eta \times \text{Id}_Y)^*([\text{proj}_1]_*) \cdot (\eta \times \text{Id}_Y)^*([\text{proj}_2]_*) \\ &= [\text{proj}_1 \circ (\eta \times \text{Id}_Y)]_* \cdot [\text{proj}_2 \circ (\eta \times \text{Id}_Y)]_* \\ &= [\eta \circ \varepsilon_Y]_* \cdot [\text{Id}_Y]_* \\ &= [\text{Id}_Y]_* \end{aligned}$$

On montre de la même manière l'autre égalité.

## 2.1. H-ESPACES

3. On doit montrer que  $\mu \circ (\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta \simeq_* \eta \circ \varepsilon_Y \simeq_* \mu \circ (\text{Id}_Y \times \sigma) \circ \Delta$ . Autrement dit, on veut montrer que  $[\mu \circ (\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta]_* = [\eta \circ \varepsilon_Y]_* = [\mu \circ (\text{Id}_Y \times \sigma) \circ \Delta]_*$ . Or :

$$\begin{aligned}
 [\mu \circ (\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta]_* &= ((\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta)^*([\mu]_*) \\
 &= ((\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta)^*([\text{proj}_1]_* \cdot [\text{proj}_2]_*) \\
 &= ((\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta)^*([\text{proj}_1]_*) \cdot ((\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta)^*([\text{proj}_2]_*) \\
 &= [\text{proj}_1 \circ (\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta]_* \cdot [\text{proj}_2 \circ (\sigma \times \text{Id}_Y) \circ \Delta]_* \\
 &= [\sigma]_* \cdot [\text{Id}_Y]_* \\
 &= [\text{Id}_Y]_*^{-1} \cdot [\text{Id}_Y]_* \\
 &= [\eta \circ \varepsilon_Y]_*.
 \end{aligned}$$

On montre de la même manière l'autre égalité. □

**2.1.7 Remarque.** De manière générale :  $\forall f, g : U \longrightarrow V$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & \longrightarrow & V \\
 & \nearrow & & & \uparrow \text{proj}_1 \\
 U & \xrightarrow{\Delta} & U \times U & \xrightarrow{f \times g} & V \times V \\
 & \searrow & & & \downarrow \text{proj}_2 \\
 & & g & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

**2.1.8 Proposition.** Si  $(Y, y_0, \mu, \sigma, \eta)$  est un  $H$ -groupe, alors

$$[-, (Y, y_0)]_* : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

est un foncteur.

Démonstration. *Laissé en exercice... Indication :*  $\forall (X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$  on définit une multiplication sur  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$  par :  $\forall [f]_*, [g]_* \in [(X, x_0), (Y, y_0)]_*$

$$[f]_* \cdot [g]_* = [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta]_*.$$

□

**2.1.9 Exemple.** Soit  $(Z, z_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ . L'espace des lacets sur  $Z$  basés en  $z_0$  est défini par :

$$\Omega_{z_0} Z = \{\lambda \in \text{Map}(I, Z) \mid \lambda(0) = \lambda(1) = z_0\}$$

muni de sa topologie de sous espace. Cet espace peut être muni d'une structure de  $H$ -groupe :

- Élément neutre :

$$\begin{aligned}
 \eta : \{*\} &\longrightarrow \Omega_{z_0} Z \\
 * &\longmapsto c_{z_0}
 \end{aligned}$$

où  $c_{z_0}$  est le chemin constant en  $z_0$ .

- Multiplication :

$$\begin{aligned}
 \mu : \Omega_{z_0} Z \times \Omega_{z_0} Z &\longrightarrow \Omega_{z_0} Z \\
 (\lambda, \lambda') &\longmapsto \lambda \star \lambda'
 \end{aligned}$$

où  $\star$  est la concaténation.

- Élément inverse :

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega_{z_0} Z &\longrightarrow \Omega_{z_0} Z \\ \lambda &\longmapsto \bar{\lambda} \end{aligned}$$

où  $\bar{\lambda}$  est le lacet  $\lambda$  parcourut dans le sens inverse.

On a vérifié les axiomes des  $H$ -groupes dans le cours de Topologie 2! La preuve que  $\mu$  et  $\sigma$  sont des applications continues est laissé en exercice. Donc  $(\Omega_{z_0} Z, z_0, \mu, \sigma, \eta)$  est un  $H$ -groupe.

## 2.2 Co- $H$ -espaces

On va dualiser tout ce que l'on vient de faire pour les  $H$ -espaces et les  $H$ -groupes. Supposons que  $(X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$  soit tel qu'il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{[(X, x_0), -]_*} & \mathbf{Set} \\ & \searrow \exists & \nearrow U \\ & \mathbf{Grp} & \end{array}$$

Donc :

- L'ensemble  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$  est muni d'une structure de groupe  $\forall (Y, y_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ ,
- Pour toute application continue basée  $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ , on a une application induite

$$\begin{aligned} g_* : [(X, x_0), (Y, y_0)]_* &\longrightarrow [(X, x_0), (Z, z_0)]_* \\ [f]_* &\longmapsto [g \circ f]_* \end{aligned}$$

Ceci induit sur  $(X, x_0)$  une structure de co- $H$ -groupe.

**2.2.1 Définition (Wedge).** Soient  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ . Le **wedge** (ou **bouquet**) de ces deux espaces est défini par l'espace :

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = \{(x, y) \in (X, x_0) \times (Y, y_0) \mid x = x_0 \text{ ou } y = y_0\}$$

basé en  $(x_0, y_0)$  et muni de sa topologie de sous espace.

**2.2.2 Remarques.** 1. Pour tout applications continues basées  $f : (X, x_0) \longrightarrow (X', x'_0)$  et  $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y'_0)$ , il existe

$$\begin{aligned} f \vee g : (X, x_0) \vee (Y, y_0) &\longrightarrow (X', x'_0) \vee (Y', y'_0) \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)). \end{aligned}$$

On a que

$$f \vee g = f \times g \Big|_{(X, x_0) \vee (Y, y_0)}^{(X', x'_0) \vee (Y', y'_0)}.$$

2. Pour tout espace basé  $(X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ , on a l'**application de pliage** définie par :

$$\begin{aligned} \nabla : (X, x_0) \vee (X, x_0) &\longrightarrow (X, x_0) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \begin{cases} x_2 & \text{si } x_1 = x_0 \\ x_1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\{x_0\}$  est fermé dans  $X$ , alors on peut montrer que  $\nabla$  est continue (en appliquant le lemme de recollement). De manière analogue au fait que  $\text{proj}_i \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta = f_i, \forall i \in \{1, 2\}$ , on a que  $\forall f_1, f_2 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) \vee (X, x_0) & \xrightarrow{f_1 \vee f_2} & (Y, y_0) \vee (Y, y_0) \\ \iota_i \uparrow & & \downarrow \nabla \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f_i} & (Y, y_0) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{ccc} \iota_1 : (X, x_0) & \longrightarrow & (X, x_0) \vee (X, x_0) \\ & & x \longmapsto (x, x_0) \\ \iota_2 : (X, x_0) & \longrightarrow & (X, x_0) \vee (X, x_0) \\ & & x \longmapsto (x_0, x) \end{array}$$

Donc  $\nabla \circ (f_1 \vee f_2) \circ \iota_i = f_i, \forall i \in \{1, 2\}$ .

Regardons maintenant la structure sur  $(X, x_0)$  induite par  $[(X, x_0), -]_*$  :

1. Co-multiplication :  $[(X, x_0), (X, x_0) \vee (X, x_0)]_*$  est un groupe. Soit  $\psi : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0) \vee (X, x_0)$  une application continue basée telle que

$$[\psi]_* = [\iota_1]_* \cdot [\iota_2]_*.$$

2. Co-inversion :  $[(X, x_0), (X, x_0)]_*$  est un groupe. Soit  $\tau : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  une application continue basée telle que

$$[\tau]_* = [\text{Id}_X]_*^{-1}.$$

3. Co-unité :  $\varepsilon_X : (X, x_0) \rightarrow (\{*\}, *)$ .

**2.2.3 Proposition.** Avec le notations ci-dessus, les diagrammes suivants commutent à homotopie près :

1. Co-unité

$$\begin{array}{ccccc} X \vee \{*\} & \xleftarrow{\text{Id}_X \vee \varepsilon_X} & X \vee X & \xrightarrow{\varepsilon_X \vee \text{Id}_X} & \{*\} \vee X \\ & \searrow \cong & \uparrow \psi & \swarrow \cong & \\ & & X & & \end{array},$$

2. Co-associativité :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X \vee X \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \vee \text{Id}_X \\ X \vee X & \xrightarrow{\text{Id}_X \vee \psi} & X \vee X \vee X \end{array},$$

3. Co-inversion :

$$\begin{array}{ccccc}
 X \vee X & \xrightarrow{\text{Id}_X \vee \tau} & X \vee X & \xleftarrow{\tau \vee \text{Id}_X} & X \vee X \\
 \psi \uparrow & & \nabla \downarrow & & \uparrow \psi \\
 X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \{*\} & \xrightarrow{\eta} & X & \xleftarrow{\eta} & \{*\} & \xleftarrow{\varepsilon_X} & X
 \end{array}$$

**2.2.4 Définition** (Co-*H*-espace, co-*H*-espace associatif, co-*H*-groupe). Une famille  $(X, x_0, \varepsilon_X, \psi)$  qui vérifie la condition 1. est un **co-*H*-espace**. Si elle vérifie de plus la condition 2., alors c'est un **co-*H*-espace associatif**. Une famille  $(X, x_0, \varepsilon_X, \psi, \tau)$  qui vérifie les conditions 1., 2. et 3. est un **co-*H*-groupe**.

**2.2.5 Lemme.** Soit  $(X, x_0, \varepsilon_X, \psi)$  un co-*H*-espace et  $(Y, y_0) \in \text{Obj Top}_*$ . Alors l'élément neutre du groupe  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  est donné par  $[\eta_Y \circ \varepsilon_X]_*$  où  $\varepsilon_X : X \rightarrow \{*\}$  et où  $\eta_Y : \{*\} \rightarrow Y$ .

Démonstration. • Posons  $(Y, y_0) = (\{*\}, *)$ . Alors il existe une unique application  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  qui est donné par  $\varepsilon_X$ . Donc  $[(X, x_0), (Y, y_0)] = \{[\varepsilon_X]_*\} = \{[\eta_Y \circ \varepsilon_X]_*\}$  car  $\eta_{\{*\}} = \text{Id}_{\{*\}}$ .  
 • Soit  $(Y, y_0) \in \text{Obj Top}_*$ . Alors  $\eta_Y$  est une application basée et donc induit un homomorphisme

$$\begin{aligned}
 (\eta_Y)_* : [(X, x_0), (\{*\}, *)] &\longrightarrow [(X, x_0), (Y, y_0)] \\
 [\varepsilon_X]_* &\longmapsto [\eta_Y \circ \varepsilon_X]_*
 \end{aligned}$$

Donc, comme  $[\varepsilon_X]_*$  est l'élément neutre de  $[(X, x_0), (\{*\}, *)]$ , on a que  $[\eta_Y \circ \varepsilon_X]_*$  est l'élément neutre de  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ . □

Démonstration de la proposition 2.2.3. 1. On doit vérifier que  $(\varepsilon_X \vee \text{Id}_X) \circ \psi \simeq_* \text{Id}_X \simeq_* (\text{Id}_X \vee \varepsilon_X) \circ \psi$ . On a :

$$\begin{aligned}
 [(\varepsilon_X \vee \text{Id}_X) \circ \psi]_* &= (\varepsilon_X \vee \text{Id}_X)_*([\psi]_*) \\
 &= (\varepsilon_X \vee \text{Id}_X)_*([\iota_1]_* \cdot [\iota_2]_*) \\
 &= (\varepsilon_X \vee \text{Id}_X)_*([\iota_1]_*) \cdot (\varepsilon_X \vee \text{Id}_X)_*([\iota_2]_*) \\
 &= [(\varepsilon_X \vee \text{Id}_X) \circ \iota_1]_* \cdot [(\varepsilon_X \vee \text{Id}_X) \circ \iota_2]_* \\
 &= [\eta_Y \circ \varepsilon_X]_* \cdot [\text{Id}_X]_* \\
 &= [\text{Id}_X]_*
 \end{aligned}$$

On montre de la même manière que  $[\text{Id}_X]_* = [(\text{Id}_X \vee \varepsilon_X) \circ \psi]_*$ .

2. Exercice...

3. Exercice... □

**2.2.6 Proposition.** Si  $(X, x_0, \varepsilon, \psi, \tau)$  est un co-*H*-groupe, alors le foncteur  $[(X, x_0), -]_*$  prend son image dans **Grp**.

Démonstration, grandes idées. On définit la multiplication sur  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  par :

$$[f]_* \cdot [g]_* = [\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi]_*$$

L'inverse d'un élément  $[f]_*$  est défini par :

$$[f]_*^{-1} = [f \circ \tau]_*$$

□

**2.2.7 Exemple.** La **suspension réduite** d'un espace basé  $(Z, z_0) \in \text{Obj Top}_*$  est défini par l'espace

$$\Sigma_{z_0} Z = Z \times I / [(z, 0) \sim (z_0, t) \sim (z', 1)]$$

basé en  $[X \times \{0\}] = [\{z_0\} \times I] = [X \times \{1\}]$ . Le **smash** de  $z \in Z$  et  $t \in I$  est la classe de  $(z, t)$  dans  $\Sigma_{z_0} Z$  que l'on note  $z \wedge t$ .

*“Pour les suspensions, je vous laisse en suspend pendant la pause... blague terrible...”*

Prof. K. HESS-BELLWALD  
Le 01/11/2012

**2.2.8 Exercices.** 1. Montrer que  $\Sigma_0 \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$ .

2. Posons :

$$\begin{aligned} \psi : \Sigma_{z_0} Z &\longrightarrow \Sigma_{z_0} Z \vee \Sigma_{z_0} Z \\ z \wedge t &\longmapsto \begin{cases} (z \wedge 2t, z \wedge 0) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (z \wedge 0, z \wedge (2t - 1)) & \text{sinon} \end{cases}, \\ \tau : \Sigma_{z_0} Z &\longrightarrow \Sigma_{z_0} Z \\ z \wedge t &\longmapsto z \wedge (1 - t). \end{aligned}$$

Alors  $(\Sigma_{z_0} Z, z_0 \wedge 0, \varepsilon, \psi, \tau)$  est un co- $H$ -groupe. En particulier,  $\mathbb{S}^n$  est un co- $H$ -groupe si  $n \geq 1$ .

## 2.3 Le cas abélien

**2.3.1 Lemme** (Eckmann - Hilton). Soit  $G$  un ensemble muni de deux opérations binaires

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \odot b, \\ \nu : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

qui admettent un élément neutre commun  $e \in G$ . Si

$$(a \odot b) \cdot (c \odot d) = (a \cdot c) \odot (b \cdot d), \quad \forall a, b, c, d \in G,$$

alors :

1. Les deux opérations sont égales :  $a \odot b = a \cdot b, \quad \forall a, b \in G,$
2. Les deux opérations sont commutatives,
3. Les deux opérations sont associatives.

On peut se représenter la relation avec un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \xrightarrow{\odot} & \begin{bmatrix} a \odot b \\ c \odot d \end{bmatrix} \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \cdot \\ [a \cdot c & b \cdot d] & \xrightarrow{\odot} & \begin{bmatrix} (a \odot b) \cdot (c \odot d) \\ = (a \cdot c) \odot (b \cdot d) \end{bmatrix} \end{array}$$

Démonstration. 1. *Considérons la configuration*

$$\begin{bmatrix} a & e \\ e & b \end{bmatrix}.$$

On a que :

$$(a \odot e) \cdot (e \odot b) = (a \cdot e) \odot (e \cdot b) \iff a \odot b = a \cdot b, \quad \forall a, b \in G.$$

2. *Considérons la configuration*

$$\begin{bmatrix} e & a \\ b & e \end{bmatrix}.$$

On a que :

$$\begin{aligned} (e \odot a) \cdot (b \odot e) &= a \cdot b = a \odot b \\ &= (e \cdot b) \odot (a \cdot e) = b \odot a = b \cdot a. \end{aligned}$$

3. *Considérons la configuration*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ e & c \end{bmatrix}.$$

On a que :

$$\begin{aligned} (a \odot b) \cdot (e \odot c) &= (a \odot b) \cdot c = (a \odot b) \odot c = (a \cdot b) \cdot c \\ &= (a \cdot e) \odot (b \cdot c) = a \odot (b \cdot c) = a \odot (b \odot c) = a \cdot (b \cdot c). \end{aligned}$$

□

**2.3.2 Proposition.** Si  $(X, x_0, \varepsilon, \psi, \tau)$  est un co- $H$ -groupe et si  $(Y, y_0, \eta, \mu, \sigma)$  est un  $H$ -groupe, alors les deux structures de groupes sur  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$  sont les mêmes et le groupe est abélien.

Démonstration. On sait que  $[\eta_Y \circ \varepsilon_X]_*$  est l'élément neutre de  $\mu$  et  $\psi$ . Posons

$$\begin{aligned} [f]_* \odot [g]_* &= [\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi]_*, \\ [f]_* \cdot [g]_* &= [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta]_*. \end{aligned}$$

Soient  $f, g, h, k : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Alors :

$$\begin{aligned} ([f]_* \odot [g]_*) \cdot ([h]_* \odot [k]_*) &= [\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi]_* \cdot [\nabla \circ (h \vee k) \circ \psi]_* \\ &= [\mu \circ ((\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi) \times (\nabla \circ (h \vee k) \circ \psi)) \circ \Delta]_* \\ ([f]_* \cdot [h]_*) \odot ([g]_* \cdot [k]_*) &= [\mu \circ (f \times h) \circ \Delta]_* \odot [\mu \circ (g \times k) \circ \Delta]_* \\ &= [\nabla \circ ((\mu \circ (f \times h) \circ \Delta) \vee (\mu \circ (g \times k) \circ \Delta)) \circ \psi]_*. \end{aligned}$$

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X & \xrightarrow{\psi \times \psi} & (X \vee X) \times (X \vee X) \xrightarrow{(f \vee g) \times (h \vee k)} (Y \vee Y) \times (Y \vee Y) \\ & & \downarrow \psi & & \nabla \times \nabla \downarrow \\ & & X \vee X & & Y \times Y \\ & & \downarrow \Delta \vee \Delta & & \downarrow \mu \\ (X \times X) \vee (X \times X) & & & & \\ & & \downarrow (f \times h) \vee (g \times k) & & \\ (Y \times Y) \vee (Y \times Y) & \xrightarrow{\mu \vee \mu} & Y \vee Y & \xrightarrow{\nabla} & Y \end{array}$$

Il vient que ce diagramme commute (exactement). Donc les deux applications sont les mêmes, sont associatives et commutatives.  $\square$

**2.3.3 Lemme.** Soient  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{Obj Top}_*$ . Alors :

$$[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*.$$

Démonstration. Définissons

$$\begin{aligned} \alpha : [\Sigma X, Y]_* &\longrightarrow [X, \Omega Y]_* \\ [f]_* &\longmapsto [f^\sharp]_*, \\ f^\sharp : X &\longrightarrow \Omega Y \\ x &\longmapsto f^\sharp(x), \\ f^\sharp(x) : I &\longrightarrow Y \\ t &\longmapsto f(x \wedge t). \end{aligned}$$

On a que :

- $f^\sharp(x)$  est continue car elle est donnée par :

$$I \hookrightarrow \{x\} \times I \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{f} Y$$

- $f^\sharp(x)$  est bien un lacet basé car  $f^\sharp(x)(0) = f(x \wedge 0) = y_0$ , car  $x \wedge 0$  est le point de base de  $\Sigma X$ , et  $f^\sharp(x)(1) = f(x \wedge 1) = y_0$ .
- $\alpha$  est bien définie car si  $f \simeq_* f'$ , alors  $f^\sharp \simeq_* (f')^\sharp$  puisque si  $H : X \times I \longrightarrow Y$  est une homotopie basée de  $f$  vers  $f'$ , alors

$$\begin{aligned} H^\sharp : \Sigma X \times I &\longrightarrow \Omega Y \\ (x, t) &\longmapsto H((x \wedge -), t) : I \longrightarrow Y \end{aligned}$$

est une homotopie basée de  $f^\sharp$  vers  $(f')^\sharp$ .

- $f^\sharp$  est continue. On utilise le fait que  $\Omega Y$  est muni de la topologie de sous espace induite par la topologie compact-ouvert de  $\text{Map}(I, Y)$ .
- $\alpha$  est un homomorphisme car  $\forall [f]_*, [g]_* \in [\Sigma X, Y]_*$  on a que :

$$\begin{aligned} \alpha([f]_*, [g]_*) &= \alpha([\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi]_*) \\ &= [(\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi)^\sharp]_* , \\ \alpha([f]_*) \cdot \alpha([g]_*) &= [f^\sharp]_* \cdot [g^\sharp]_* \\ &= [\mu \circ (f^\sharp \times g^\sharp) \circ \Delta]_* . \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi)^\sharp : X &\longrightarrow \Omega Y \\ (\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi)^\sharp(x) : I &\longrightarrow Y \\ t &\longmapsto (\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi)(x \wedge t) \\ &= \begin{cases} \nabla \circ (f \vee g)(x \wedge 2t, *) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \nabla \circ (f \vee g)(*, x \wedge (2t - 1)) & \text{si } t \in ]1/2, 0] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \nabla(f(x \wedge 2t), *) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \nabla(*, g(x \wedge (2t - 1))) & \text{si } t \in ]1/2, 0] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x \wedge 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(x \wedge (2t - 1)) & \text{si } t \in ]1/2, 0] \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mu \circ (f^\sharp \times g^\sharp) \circ \Delta : X \longrightarrow \Omega Y, \\ X & \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f^\sharp \times g^\sharp} \Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{\mu} \Omega Y \\ x & \longmapsto (x, x) \longmapsto (f^\sharp(x), g^\sharp(x)) \longmapsto f^\sharp(x) \star g^\sharp(x) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (f^\sharp(x) \star g^\sharp(x))(t) &= \begin{cases} f^\sharp(x)(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g^\sharp(x)(2t-1) & \text{si } t \in ]1/2, 0] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x \wedge 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(x \wedge (2t-1)) & \text{si } t \in ]1/2, 0] \end{cases} . \end{aligned}$$

Donc  $(\nabla \circ (f \vee g) \circ \psi)^\sharp = \mu \circ (f^\sharp \times g^\sharp) \circ \Delta$  ce qui implique que  $\alpha$  est bien un homomorphisme.

- $\alpha$  admet un inverse

$$\begin{aligned} \beta : [X, \Omega Y]_* &\longrightarrow [\Sigma X, Y]_* \\ [g]_* &\longmapsto [g^\flat]_* , \\ g^\flat : \Sigma X &\longrightarrow Y \\ x \wedge t &\longmapsto g(x)(t). \end{aligned}$$

□

**2.3.4 Corollaire.** Le groupe d'homotopie  $\pi_n(Y, y_0)$  est abélien  $\forall n \geq 2$ .

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned} \pi_n(Y, y_0) &= [(\mathbb{S}^n, 0), (Y, y_0)]_* \\ &\cong [\Sigma_0 \Sigma_0 \mathbb{S}^{n-2}, (Y, y_0)]_* \\ &\cong [\Sigma_0 \mathbb{S}^{n-2}, \Omega_{y_0} Y]_* . \end{aligned}$$

Or,  $\Sigma_0 \mathbb{S}^{n-2}$  est un co-H-groupe et  $\Omega_{y_0} Y$  est un H-groupe. Donc  $[(\mathbb{S}^n, 0), (Y, y_0)]_*$  est abélien. □



# Chapitre 3

## Suites exactes de Puppe

Le but de ce chapitre est de démontrer l'existence d'une longue suite exacte de groupes d'homotopie dont découlera l'axiome d'exactitude de notre théorie d'homologie.

### 3.1 Le cas absolu

**3.1.1 Définition** (Cône réduit sur un espace basé). Le **cône réduit** est un foncteur

$$\begin{aligned} C : \mathbf{Top}_* &\longrightarrow \mathbf{Top}_* \\ (X, x_0) &\longmapsto C(X, x_0) = X \times I / [(x, 1) \sim (x_0, t)] \\ \left( (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \right) &\longmapsto \left( C(X, x_0) \xrightarrow{\tilde{f}} C(Y, y_0) \right) \\ \tilde{f} : C(X, x_0) &\longrightarrow C(Y, y_0) \\ [(x, t)] &\longmapsto [(f(x), t)] \end{aligned}$$

où  $C(X, x_0)$  est basé en  $[(x_0, 0)]$ .

**3.1.2 Notations.** Dans le cône réduit, on note les classes d'équivalences comme suit :  $[x, t] = [(x, t)]$ . Pour alléger les notations, on note  $CX = C(X, x_0)$ .

**3.1.3 Remarque.** Soit  $(X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ . Alors il existe un morphisme

$$\begin{aligned} \iota_X : (X, x_0) &\longrightarrow CX \\ x &\longmapsto [x, 0]. \end{aligned}$$

**3.1.4 Définition** (Cône réduit d'une application basée). Soit  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ . On définit **cône réduit** de  $f$  (aussi appelé le **mapping cone**) comme étant le pushout :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \iota_X \downarrow & \Gamma & \downarrow i_f \\ CX & \longrightarrow & Cf \end{array}$$

où

$$Cf = CX \amalg Y / [[x, 0] \sim f(x)].$$

On a donc :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_f} Cf \xrightarrow{i_{i_f}} Ci_f \xrightarrow{f} \dots$$

L'espace

**3.1.5 Définition** (Suite exacte d'ensembles). Une suite

$$(A, a_0) \xrightarrow{f} (B, b_0) \xrightarrow{g} (C, c_0)$$

est exacte si  $g^{-1}(\{c_0\}) = \text{Im } f$ .

**3.1.6 Théorème.** On a que

$$Ci_f \simeq_* \Sigma X.$$

Ce théorème est important pour démontrer

**3.1.7 Théorème.** Pour toute application basée  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , on a une suite d'applications basées

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i_f} & Cf & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma Cf & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \Sigma\Sigma X & \longrightarrow & \Sigma\Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma\Sigma Cf & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

qui induit pour tout espace  $(W, w_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$  une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \dots \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & [\Sigma\Sigma Cf, W]_* \longrightarrow [\Sigma\Sigma Y, W]_* \longrightarrow [\Sigma\Sigma X, W]_* \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & [\Sigma Cf, W]_* \longrightarrow [\Sigma Y, W]_* \longrightarrow [\Sigma X, W]_* \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & [Cf, W]_* \xrightarrow{i_f^*} [Y, W]_* \xrightarrow{f^*} [X, W]_* \end{array}$$

**3.1.8 Remarque.** Le dernier niveau représente une suite exacte d'ensembles, l'avant dernier niveau représente une suite exacte de groupes et les niveaux précédents représentent une suite exactes de groupes abéliens.

**3.1.9 Lemme.** Soit  $y_0 \in Y' \subseteq Y$  où  $(Y, y_0), (Y', y_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ . S'il existe une homotopie  $H : Y \times I \rightarrow Y$  telle que  $Y'$  soit contractile dans  $Y$ , i.e. telle que

1.  $H(y, 0) = y, \quad \forall y \in Y,$
2.  $H(y', t) \in Y' \quad \forall y' \in Y', \forall t \in I,$
3.  $H(y', 1) = y_0 \quad \forall y' \in Y',$
4.  $H(y_0, t) = y_0 \quad \forall t \in I,$

alors l'application quotient  $q : Y \rightarrow Y/Y'$  est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Il faut montrer que  $\exists s : Y/Y' \rightarrow Y$  telle que

$$s \circ q \simeq_* \text{Id}_Y \quad \text{et} \quad q \circ s \simeq_* \text{Id}_{Y/Y'}.$$

Observer que  $H(-, 1) : Y \rightarrow Y$  envoie tout élément de  $Y'$  sur  $y_0$ . Par conséquent, il existe une unique application continue  $s : Y/Y' \rightarrow Y$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{H(-, 1)} & Y \\ q \downarrow & \nearrow s & \\ Y/Y' & & \end{array}$$

Donc  $s \circ q = H(-, 1)$ . Par définition de  $s$ , on a que  $H$  est une homotopie basée de  $\text{Id}_Y$  vers  $s \circ q$ . Pour trouver une homotopie de  $q \circ s$  vers  $\text{Id}_{Y/Y'}$ , considérons

$$\begin{array}{ccccc} Y \times I & \xrightarrow{H} & Y & \xrightarrow{q} & Y/Y' \\ q \times \text{Id}_I \downarrow & & & \nearrow H' & \\ Y/Y' \times I & & & & \end{array}$$

Puisque  $q \circ H(y', t) = [y_0], \quad \forall y' \in Y', \forall t \in I$ , il existe une unique homotopie  $H' : Y/Y' \times I \rightarrow Y/Y'$  telle que  $H' \circ (q \times \text{Id}_I) = q \circ H$ . Par ailleurs, on a que

$$\begin{aligned} H'([y], 0) &= [H(y, 0)] = [y], \\ H'([y], 1) &= [H(y, 1)] = q \circ s(y), \\ H'([y_0], t) &= [H(y_0, t)] = [y_0]. \end{aligned}$$

On a donc une homotopie basée de  $\text{Id}_{Y/Y'}$  vers  $q \circ s$ . □

**3.1.10 Lemme.** Soit

$$\begin{aligned} i_0 : X &\longrightarrow X \times I \\ x &\longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Alors toute application basée  $h : Ci_0 \rightarrow Y$  s'étend en une application  $H : CX \times I \rightarrow Y$ , i.e. on a :

$$\begin{array}{ccc} Ci_0 & \xrightarrow{h} & Y \\ j \downarrow & \nearrow H & \\ CX \times I & & \end{array}$$

avec  $H \circ j = h$ .

### 3.1. LE CAS ABSOLU

---

Démonstration. *Définissons*

$$H : CX \times I \longrightarrow Y$$

$$([x, s], t) \longmapsto \begin{cases} h([x, 1 - (1-s)(1+t)]) & \text{si } (1-s)(1+t) \leq 1 \\ h(x, (1-s)(1+t) - 1) & \text{si } (1-s)(1+t) \geq 1. \end{cases}$$

C'est bien défini car si  $(1-s)(1+t) = 1$ , alors  $1 - (1-s)(1+t) = 0 = (1-s)(1+t) - 1$  et  $h([x, 0]) = h(x, 0)$  car  $[x, 0]$  et  $(x, 0)$  sont dans les mêmes classes d'équivalence dans  $Ci_0$ . Enfin,

$$H \circ j(x, t) = H([x, 0], t) = h(x, t),$$

$$H \circ j([x, s]) = H([x, s], 0) = h([x, s]).$$

□

**3.1.11 Lemme.** Soit  $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$  et  $A \subset X$  fermé. Soit  $f : A \longrightarrow Y$  une application continue. Considérons le pushout :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \amalg_A Y \end{array}$$

où

$$X \amalg_A Y = (X \amalg Y) / [a \sim f(a)].$$

Alors l'application induite  $X/A \longrightarrow (X \amalg_A Y)/Y$  est un homéomorphisme.

Démonstration. *Voire l'exercice 3 de la série 23 du cours de Topologie 2.*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_1} & X \amalg Y & \xrightarrow{q'} & (X \amalg_A Y)/Y \\ q \downarrow & & & \nearrow & \\ X/A & & & \cong \text{homéom.} & \end{array}$$

□

Démonstration du théorème 3.1.6. *Analysons d'abord  $Ci_f$  : on a*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i_f} & Cf \\ \iota_Y \downarrow & \Gamma & \downarrow i_{i_f} \\ CY & \xrightarrow{j_{i_f}} & Ci_f \end{array}$$

où

$$Ci_f = (CY \amalg Cf) / [[y, 0] \sim i_f(y)]$$

$$= (CY \amalg Y \amalg CX) / [[y, 0] \sim y, [x, 0] \sim f(x)]$$

$$\cong (CY \amalg CX) / [[x, 0] \sim [f(x), 0]].$$

Voici l'idée de la preuve : on a que  $CY \simeq_* \{*\}$ , même dans  $Ci_f$ . Donc

$$Ci_f \simeq_* Ci_f/CY \cong CX/[x, 0] \sim [x', 0] \cong \Sigma X.$$

- Soit  $G$  l'homotopie contractante donnée par

$$\begin{aligned} G : CY \times I &\longrightarrow CY \\ ([y, s], t) &\longmapsto [y, 1 - (1 - s)(1 - t)]. \end{aligned}$$

Observer que :

$$\begin{aligned} G([y, s], 0) &= [y, s] \\ G([y, s], 1) &= [y, 1] \\ G([y_0, s], t) &= [y_0, 1 - (1 - s)(1 - t)]. \end{aligned}$$

Définissons  $h' : X \times I \longrightarrow Ci_f$  par :

$$\begin{array}{ccccccc} X \times I & \xrightarrow{f \times \text{Id}_I} & Y \times I & \xrightarrow{\iota_Y \times \text{Id}_I} & CY \times I & \xrightarrow{G} & CY & \xrightarrow{j_{i_f}} & Ci_f \\ (x, t) & \longmapsto & (f(x), t) & \longmapsto & ([f(x), 0], t) & \longmapsto & [f(x), t] & \longmapsto & [[f(x), t]] \end{array}$$

et soit  $h'' : CX \longrightarrow Ci_f$  définie par :

$$\begin{array}{ccc} CX & \hookrightarrow & CX \amalg CY & \xrightarrow{q} & Ci_f \\ [x, s] & \longmapsto & [x, s] & \longmapsto & [[x, s]] \end{array}$$

Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ \iota_X \downarrow & & \downarrow h' \\ CX & \xrightarrow{h''} & Ci_f \end{array}$$

car

$$\begin{aligned} h' \circ i_0(x) &= h'(x, 0) = [[f(x), 0]] \\ h'' \circ \iota_X(x) &= h''([x, 0]) = [[x, 0]] = [[f(x), 0]]. \end{aligned}$$

- Ainsi, il existe une unique application  $h : Ci_0 \longrightarrow Ci_f$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{h'} & Ci_f \\ \searrow i_{i_0} & & \nearrow h \\ & Ci_0 & \\ \nearrow j_{i_0} & & \searrow h'' \\ CX & \xrightarrow{h''} & Ci_f \end{array}$$

### 3.1. LE CAS ABSOLU

Par le lemme 3.1.10, on sait que  $\exists H : CX \times I \rightarrow Ci_f$  une homotopie telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Ci_0 & \xrightarrow{h} & Ci_f \\ \downarrow & \nearrow H & \\ CX \times I & & \end{array}$$

A partir de  $G$  et de  $H$ , on va construire une homotopie  $K$  sur  $Ci_f$  contractant  $CY$  (suivant les conditions du lemme 3.1.9).

– Définissons  $K$  par :

$$\begin{aligned} K : Ci_f \times I &\longrightarrow Ci_f \\ ([[z, s]], t) &\longmapsto \begin{cases} H([z, s], t) & \text{si } z \in X \\ G([z, s], t) & \text{si } z \in Y \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie que c'est bien défini en utilisant la propriété universelle de l'espace quotient :

$$\begin{array}{ccc} CX \amalg CY & \xrightarrow{H \amalg G} & Ci_f \\ q \downarrow & \nearrow \exists! & \\ Ci_f & & \end{array}$$

Il vient que  $K$  satisfait les hypothèses du lemme 3.1.9. Donc on sait que l'application quotient  $Ci_f \rightarrow Ci_f/CY$  est une équivalence d'homotopie. Par le lemme 3.1.11, les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{i_f} & Cf & \longrightarrow & Cf/Y \\ \iota_Y \downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \uparrow \cong \\ CY & \longrightarrow & Ci_f & \longrightarrow & Ci_f/CY \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \iota_X \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & Cf \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX/X \cong \Sigma X & \xleftarrow{\cong} & Cf/Y \end{array}$$

Donc

$$Ci_f \simeq_* Ci_f/CY \cong Cf/Y \cong CX/X \cong \Sigma X.$$

□

Maintenant on peut démontrer :

**3.1.12 Lemme.** Soit  $(X, x_0), (Y, y_0), (W, w_0) \in \text{Obj Top}_*$  et  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . La suite suivante est exacte (pour les ensembles pointés) :

$$[Cf, W]_* \xrightarrow{i_f^*} [Y, W]_* \xrightarrow{f^*} [X, W]_*$$

Démonstration. Remarquons que  $i_f \circ f \simeq_* c_{[x_0, 0]}$ , où  $c_{[x_0, 0]}$  est le chemin constant en  $[x_0, 0]$ , le point de base de  $Cf$ .

- Soit  $[g]_* \in [Cf, W]_*$ . Alors  $f^* \circ i_f^*([g]_*) = f^*([g \circ i_f]_*) = [g \circ i_f \circ f]_* = [g \circ c_{[x_0, 0]}]_* = [c_{w_0}]_*$ .
- Soit  $[h]_* \in [Y, W]_*$  telle que  $f^*([h]_*) = [h \circ f]_* = [c_{w_0}]_*$ . Alors  $c_{w_0} \simeq_* h \circ f$ . Donc il existe une homotopie  $H : X \times I \rightarrow W$  telle que

$$H(x, 0) = h \circ f(x), \quad H(x, 1) = w_0, \quad \forall x \in X.$$

On a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & W \\ q \downarrow & \nearrow \exists! \hat{H} & \\ CX & & \end{array}$$

avec  $\hat{H}([x, t]) = H(x, t)$ . En effet,

$$H(x, 1) = w_0 = H(x', 1) = H(x_0, t), \quad \forall x, x' \in X, \forall t \in I.$$

On a donc que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \iota_X \downarrow & & \downarrow h \\ CX & \xrightarrow{\hat{H}} & W \end{array}$$

car  $H \circ \iota_X(x) = \hat{H}([x, 0]) = H(x, 0) = h \circ f(x)$ . Donc le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{\hat{H}} & W \\ j_f \searrow & & \nearrow \exists! g \\ Y & \xrightarrow{i_f} Cf & \xrightarrow{h} W \end{array}$$

En particulier,  $g \circ i_f = h$ , ce qui implique que

$$[h]_* = [g \circ i_f]_* = i_f^*([g]_*).$$

□

### 3.2. LE CAS RELATIF

---

Démonstration du théorème 3.1.7. *Pour obtenir l'exactitude de la longue suite, observer que tout couple de flèches consécutives dans la suite*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i_f} & Cf & \longrightarrow & \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma Cf & \longrightarrow & \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 \Sigma\Sigma X & \longrightarrow & \Sigma\Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma\Sigma Cf & \longrightarrow & \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 \dots & & & & & & 
 \end{array}$$

peut être vu à homotopie près comme étant de la forme

$$A \xrightarrow{a} B \longrightarrow Ca$$

par le théorème 3.1.6. □

**3.1.13 Remarque.** La suite d'applications du théorème 3.1.7 est l'une des deux suites de Dold - Puppe . L'autre se trouve sur la série 8.

## 3.2 Le cas relatif

La construction de paragraphe précédent se généralise facilement pour mener au résultat suivant :

**3.2.1 Théorème.** Soit  $(X, A, x_0), (Y, B, y_0) \in \text{Obj Top}_{\text{rel}}$  et soit  $f : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ . Il existe une suite d'applications continues de couples basés

$$\begin{array}{ccccccc}
 (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) & \longrightarrow & (Cf, Cf|_A^B) & \longrightarrow & \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 (\Sigma X, \Sigma A) & \longrightarrow & (\Sigma Y, \Sigma B) & \longrightarrow & (\Sigma Cf, \Sigma Cf|_A^B) & \longrightarrow & \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 (\Sigma\Sigma X, \Sigma\Sigma A) & \longrightarrow & (\Sigma\Sigma Y, \Sigma\Sigma B) & \longrightarrow & (\Sigma\Sigma Cf, \Sigma\Sigma Cf|_A^B) & \longrightarrow & \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 \dots & & & & & & 
 \end{array}$$

telle que  $\forall (Z, C, z_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}}$ , la suite induite soit exacte :

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \curvearrowright \\
 [(\Sigma\Sigma C f, \Sigma\Sigma C f|_A^B), (Z, C)]_* \rightarrow [(\Sigma\Sigma Y, \Sigma\Sigma B), (Z, C)]_* \rightarrow [(\Sigma\Sigma X, \Sigma\Sigma A), (Z, C)]_* \\
 \curvearrowright \\
 [(\Sigma C f, \Sigma C f|_A^B), (Z, C)]_* \longrightarrow [(\Sigma Y, \Sigma B), (Z, C)]_* \longrightarrow [(\Sigma X, \Sigma A), (Z, C)]_* \\
 \curvearrowright \\
 [(C f, C f|_A^B), (Z, C)]_* \longrightarrow [(Y, B), (Z, C)]_* \xrightarrow{f^*} [(X, A), (Z, C)]_*
 \end{array}$$

**3.2.2 Lemme.** Soit  $(X, A, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_{\text{rel}*}$ . Alors :

1.  $[(\mathbb{S}^n, \{z_0\}), (X, A)]_* \cong \pi_n(X, x_0)$ ,
2.  $[(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n), (X, A)]_* \cong \pi_n(A, x_0)$ .

Démonstration. 1. On a une bijection

$$\mathbf{Top}_{\text{rel}*}((\mathbb{S}^n, \{z_0\}, z_0), (X, A, x_0)) \longleftrightarrow \mathbf{Top}_*((\mathbb{S}^n, z_0), (X, x_0))$$

compatible avec les homotopies basées et dont on déduit l'isomorphisme.

2. On a une bijection

$$\mathbf{Top}_{\text{rel}*}((\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n, z_0), (X, A, x_0)) \longleftrightarrow \mathbf{Top}_*((\mathbb{S}^n, z_0), (A, x_0))$$

compatible avec les homotopies basées et dont on déduit l'isomorphisme. □

**3.2.3 Exemple (Important).** Considérons  $j : (\partial I, \{0\}, 0) \hookrightarrow (\partial I, \partial I, 0)$ . En général, le cône  $C \text{Id}_X$  se calcule comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X \\
 \iota_X \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 CX & \longrightarrow & X \amalg_X CX
 \end{array}$$

avec

$$X \amalg_X CX = X \amalg CX / [x \sim [x, 0]] \cong CX.$$

En particulier, on a que  $Cj = C\partial I = \partial I \times I / [(0, t) \sim (1, 1)] \cong I$ . Puis, en général, si  $k$  est l'inclusion du point de base  $k : \{x_0\} \hookrightarrow X$ , alors le cône  $Ck$  se calcule comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 \{x_0\} & \xrightarrow{k} & X \\
 \iota_{\{x_0\}} \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 C\{x_0\} & \longrightarrow & X \amalg_{\{x_0\}} C\{x_0\}
 \end{array}$$

### 3.2. LE CAS RELATIF

---

Or,  $X \coprod_{\{x_0\}} C\{x_0\} \cong X$ . Donc  $Cj|_{\{0\}}^{\partial I} \cong \partial I$ . Ainsi, il existe une suite de couples basés :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\partial I, \{0\}) & \xrightarrow{j} & (\partial I, \partial I) & \longrightarrow & (I, \partial I) & \longrightarrow & \dots \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 (\Sigma \partial I, \Sigma\{0\}) & \longrightarrow & (\Sigma \partial I, \Sigma \partial I) & \longrightarrow & (\Sigma I, \Sigma \partial I) & \longrightarrow & \dots \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 \dots & & & & & & \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 (\Sigma^n \partial I, \Sigma^n \{0\}) & \longrightarrow & (\Sigma^n \partial I, \Sigma^n \partial I) & \longrightarrow & (\Sigma^n I, \Sigma^n \partial I) & \longrightarrow & \dots \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 \dots & & & & & & 
 \end{array}$$

Or, il vient que

$$\begin{aligned}
 \Sigma^n \partial I &\cong \mathbb{S}^n \\
 \Sigma^n \{0\} &\cong \{z_0\} \\
 \Sigma^n I &\cong \mathbb{D}^{n+1} \\
 (\Sigma^n I, \Sigma^n \partial I) &\cong (\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \text{ en tant que couple.}
 \end{aligned}$$

La suite est donc homéomorphe espace par espace à la suite suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{S}^0, \{z_0\}) & \xrightarrow{j} & (\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0) & \longrightarrow & (\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) & \longrightarrow & \dots \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 (\mathbb{S}^1, \{z_0\}) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) & \longrightarrow & (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \dots \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 \dots & & & & & & \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 (\mathbb{S}^n, \{z_0\}) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) & \longrightarrow & (\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n) & \longrightarrow & \dots \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 \dots & & & & & & 
 \end{array}$$





# Chapitre 4

## Cofibrations et extensions d'homotopies

### 4.1 Définition, caractérisation et exemples

Le but de ce chapitre est d'étudier des applications basées qui se "comportent homotopiquement" comme  $\iota_X : X \hookrightarrow CX$  ou comme  $i_f : Y \rightarrow Cf$  où  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Référence : [Piccinini, §2.3 - 2.4].

**4.1.1 Rappel.** On a :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & & \\
 \iota_X \downarrow & \Gamma & \downarrow & & \\
 CX & \longrightarrow & Ci_0 & \xrightarrow{\forall h} & Y \\
 & & \downarrow & \nearrow \exists H & \\
 & & CX \times I & & 
 \end{array}$$

Un "bon comportement homotopique" serait de permettre une extension d'homotopie. Pour expliquer une restriction sur les couples étudiés :

**4.1.2 Lemme.** Si  $A$  est un sous espace fermé de  $X$ , alors le pushout de l'inclusion  $A \hookrightarrow X$  et de  $i_0 : A \hookrightarrow A \times I$  est la réunion  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ .

Démonstration. On définit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{x \mapsto (x, 0)} & (X \times \{0\}) \cup (A \times I)
 \end{array}$$

Vérifions la propriété universelle :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \tilde{j} \\
 X & \xrightarrow{\tilde{i}} & (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \\
 & \searrow f & \nearrow H \\
 & & Y
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \exists ? \tilde{H}
 \end{array}$$

Définissons  $\tilde{H}$  par  $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$ ,  $\tilde{H}(a, t) = H(a, t)$ . C'est bien défini car  $H \circ i = f \circ j$ , donc  $\tilde{H}(a, 0) = f(a)$ ,  $\forall a \in A$ . La continuité de  $\tilde{H}$  est due au lemme de recollement (car  $A$  est fermé). L'unicité de  $\tilde{H}$  provient de fait que  $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) = \text{Im } \tilde{j} \cup \text{Im } \tilde{i}$ .  $\square$

**4.1.3 Définition** (Propriété d'extension d'homotopie). Soit  $(X, A)$  un couple d'espace où  $A$  est fermé dans  $X$ . Alors le couple vérifie la **propriété d'extension d'homotopie** (abrégée **PEH**) si  $\forall h : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y$ , il existe une extension  $H : X \times I \rightarrow Y$  i.e. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & \xrightarrow{h} & Y \\
 k \downarrow & \nearrow H & \\
 X \times I & & 
 \end{array}$$

**4.1.4 Définition** (Cofibration). Une application continue  $j : A \rightarrow X$  est une **cofibration** si :

- $j$  est un plongement i.e.  $j|_{\text{Im } j}$  est un homéomorphisme,
- $\text{Im } j$  est fermé dans  $X$ ,
- le couple  $(X, \text{Im } j)$  vérifie la PEH.

Souvent, on va abuser un peu de cette notion et supposer que toute cofibration est une inclusion d'un sous-espace fermé...

**4.1.5 Notation.** Si  $j : A \rightarrow X$  est une cofibration, on note  $j : A \hookrightarrow X$ .

**4.1.6 Exemple.** Pour tout  $(X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ , l'application  $\iota_X : X \hookrightarrow CX$  est une cofibration (par le lemme 3.1.10).

**4.1.7 Rappel.** L'application  $k : (CX \times \{0\}) \cup (\iota_X(X) \times I) \hookrightarrow CX \times I$  admet une rétraction.

De manière analogue :

**4.1.8 Proposition** (Caractérisation des cofibrations). Soit  $A$  un sous-espace fermé de  $X$ . Alors l'inclusion  $j : A \hookrightarrow X$  est une cofibration (i.e. le couple  $(X, A)$  vérifie la PEH) si et seulement si il existe une rétraction  $r : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \hookrightarrow X \times I$  i.e. une application  $r : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  telle que  $r \circ k = \text{Id}_{(X \times \{0\}) \cup (A \times I)}$ .

Démonstration.  $\Rightarrow$  On applique la PEH au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & \xrightarrow{\text{Id}_{(X \times \{0\}) \cup (A \times I)}} & (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \\
 k \downarrow & \nearrow \exists r & \\
 X \times I & & 
 \end{array}$$

← On a :

$$\begin{array}{ccc} (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & \xrightarrow{h} & Y \\ k \uparrow \quad \downarrow r & \nearrow h \circ r & \\ X \times I & & \end{array}$$

car  $(h \circ r) \circ k = h$ .

□

**4.1.9 Exemple** (Très important pour la suite). L'inclusion  $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$  est une cofibration (cf série 9).

“Ici, la rétraction consiste à enfoncer son doigt dans un cylindre en pâte à modeler!”

Prof. K. HESS-BELLWALD

Le 22/11/2012

**4.1.10 Remarques.** Les cofibrations sont préservées sous certaines constructions topologiques, comme le pushout :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tilde{j} \\ X & \longrightarrow & X \amalg_A Y \end{array}$$

## 4.2 Propriétés

Résultat analogue au lemme 3.1.9 :

**4.2.1 Proposition.** Si  $j : A \rightarrow X$  est une cofibration et si  $A$  est contractile (pas forcément dans  $X$ ), alors l'application quotient  $q : X \rightarrow X/A$  est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Il existe une homotopie contractante  $H : A \times I \rightarrow A$  i.e. une homotopie telle que  $H(a, 0) = a, H(a, 1) = a_0, \forall a \in A$ . On a donc une application continue  $\tilde{H}$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & \xrightarrow{(\text{Id}_{X \times \{0\}}) \cup (j \circ H)} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\ X \times I & & \end{array}$$

car  $j$  est une cofibration. On a que :

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, 0) &= x, & \forall x \in X, \\ \tilde{H}(a, t) &= j \circ H(a, t) \in A, & \forall a \in A, \forall t \in I, \\ \tilde{H}(a, 1) &= a_0, & \forall a \in A. \end{aligned}$$

Le lemme 3.1.9 nous permet de conclure.

□

**4.2.2 Corollaire.** Si  $j : A \rightarrow X$  est une cofibration, alors  $Cj \simeq X/A$ .

#### 4.2. PROPRIÉTÉS

---

Démonstration. *Considérons le pushout :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & X \\ \iota_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tilde{\iota} \\ CA & \xrightarrow{\tilde{j}} & Cj \end{array}$$

Par l'exercice 1 de la série 9,  $\tilde{j}$  et  $\tilde{\iota}$  sont des cofibrations. Par la proposition précédente, on a que l'application quotient  $q : Cj \rightarrow Cj/CA$  est une équivalence d'homotopie. Par le lemme 3.1.11, on a :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j} & X & \longrightarrow & X/A \\ \iota_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tilde{\iota} & & \downarrow \cong \\ CA & \xrightarrow{\tilde{j}} & Cj & \longrightarrow & Cj/CA \end{array}$$

□

**4.2.3 Remarque.** Il existe des contre exemples si  $j$  n'est pas une cofibration...

**4.2.4 Théorème** (Les cofibrations sont partout ! (partouuuuuu!)). Pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ , il existe une cofibration  $j_f : X \rightarrow M_f$  et une équivalence d'homotopie  $p_f : M_f \rightarrow Y$  telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_f} & M_f \\ & \searrow p_f & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Démonstration. *Considérons le pushout :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \hat{i} \\ X \times I & \longrightarrow & M_f \end{array}$$

où

$$M_f = Y \coprod (X \times I) / [f(x) \sim (x, 0)].$$

Définissons

$$\begin{aligned} j_f : X &\longrightarrow M_f \\ x &\longmapsto [x, 0], \\ p_f : M_f &\longrightarrow Y \\ [y] &\longmapsto y \\ [x, s] &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

On a que  $p_f$  est l'unique application continue  $M_f \rightarrow Y$  donnée par la propriété universelle du pushout :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 i_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \widehat{i} \\
 X \times I & \longrightarrow & M_f \\
 & \searrow p_f & \downarrow \text{Id}_Y \\
 & & Y \\
 & \searrow f \circ \text{proj}_1 & \\
 & & Y
 \end{array}$$

- Montrons que  $j_f$  est une cofibration. On utilise la caractérisation, donc on va montrer qu'il existe une rétraction  $r : M_f \times I \rightarrow (M_f \times \{0\}) \cup (j_f(X) \times I) \cong (M_f \times \{0\}) \cup (X \times \{1\} \times I)$ . Posons

$$\begin{aligned}
 r : M_f \times I &\longrightarrow (M_f \times \{0\}) \cup (X \times \{1\} \times I) \\
 ([y], t) &\longmapsto ([y], 0) \\
 ([x, s], t) &\longmapsto \begin{cases} \left( [x, 1], t - \frac{(1-s)(1-t)}{s} \right) & \text{si } s \geq 1-t \\ \left( [x, s + \frac{st}{1-t}], 0 \right) & \text{si } s \leq 1-t \end{cases}
 \end{aligned}$$

Clairement,  $\text{Im } r \subseteq (M_f \times \{0\}) \cup (X \times \{1\} \times I)$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 r([y], 0) &= ([y], 0), \\
 r([x, s], 0) &= ([x, s], 0), \\
 r([x, 1], t) &= ([x, 1], t).
 \end{aligned}$$

Donc  $r$  est bien une rétraction de l'inclusion  $(M_f \times \{0\}) \cup (X \times \{1\} \times I) \hookrightarrow M_f \times I$ . Pour vérifier la continuité, on applique le lemme de recollement. Ainsi,  $j_f$  est bien une cofibration.

- Montrons que  $p_f$  est une équivalence d'homotopie. Rappelons que  $\widehat{i} : y \mapsto [y]$ . Observer que  $p_f \circ \widehat{i} = \text{Id}_Y$ . Par ailleurs,  $\widehat{i} \circ p_f([y]) = \widehat{i}(y) = [y]$  et  $\widehat{i} \circ p_f([x, s]) = \widehat{i} \circ f(x) = [f(x)]$ . Définissons

$$\begin{aligned}
 H : M_f \times I &\longrightarrow M_f \\
 [y] &\longmapsto [y], \\
 [x, s] &\longmapsto [x, st].
 \end{aligned}$$

Par le lemme de recollement, on a que  $H$  est continue et est donc une homotopie. De plus :

$$\begin{aligned}
 H([x, s], 0) &= [x, 0] = [f(x)] = \widehat{i} \circ p_f([x, s]), \\
 H([x, s], 1) &= [x, s].
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\widehat{i} \circ p_f \sim \text{Id}_{M_f}$  par  $H$  et  $p_f$  est bien une équivalence d'homotopie.

- On a que

$$p_f \circ j_f(x) = p_f([x, 1]) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Ainsi,  $f = p_f \circ j_f$ . □

**4.2.5 Terminologie.** L'espace  $M_f$  s'appelle le **mapping cylinder** de  $f$ .



# Chapitre 5

## Introduction aux CW-complexes

Le but de ce chapitre est d'étudier une classe d'espaces topologiques qui se prêtent très bien à des constructions récursives d'applications continues et à des preuves par récurrence. Référence : [May, Ch 10].

### 5.1 Définitions et propriétés fondamentales

**5.1.1 Définition (CW-complexe).** Un espace topologique  $X$  est un **CW-complexe** s'il existe une suite d'espaces topologiques  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  appelée **décomposition CW de  $X$**  et qui est telle que :

1. L'espace  $X_0$  est discret.
2. On a les inclusions :

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \dots$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un ensemble d'indices  $\mathcal{J}_n$  et une famille d'applications continues  $\{\phi_j : \mathbb{S}^n \rightarrow X_n\}_{j \in \mathcal{J}_n}$  telle que

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in \mathcal{J}_n} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} \phi_j} & X_n \\ \downarrow & \lrcorner \tilde{\phi} & \downarrow \\ \coprod_{j \in \mathcal{J}_n} \mathbb{D}^n & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

4. On a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \cong X$$

où  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est muni de la **topologie de l'adhérence finie** i.e.

$$C \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \text{ est fermé} \iff C \cap X_k \text{ est fermé dans } X_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- 5.1.2 Terminologie.**
- Si  $X \cong X_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $X$  est de dimension  $n$  et on note  $\dim X = n$ .
  - L'espace  $X_n$  est appelé le  **$n$ -squelette** de  $X$ .

- Les applications  $\phi_j$  sont les **applications caractéristiques du CW-complexe**.
- L'image  $\text{Im } \tilde{\phi}|_{\mathbb{D}_j^{n+1}}$  est une  $(n+1)$ -cellule

**5.1.3 Exemples.** 1. Posons  $X = \mathbb{S}^1$ .

- (a) Posons  $X_0 = \{x_0\}$ . Considérons  $\mathcal{J}_0 = \{1\}$  et  $\phi_1 : \mathbb{S}^0 \rightarrow X_0$  la seule application continue possible. Formons le pushout :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^0 & \xrightarrow{\phi_1} & X_0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{D}^1 & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

où

$$X_1 = X_0 \amalg \mathbb{D}^1 / [1 \sim x_0 \sim (-1)] \cong \mathbb{S}^1.$$

On a donc  $X_0 \hookrightarrow X_1 \cong \mathbb{S}^1 = X$ .

- (b) Posons  $X_0 = \{x_+, x_-\}$ . Considérons  $\mathcal{J}_0 = \{+, -\}$  et

$$\begin{array}{ccc} \phi_+ : \mathbb{S}^0 & \longrightarrow & X_0 \\ & \pm 1 \longmapsto & x_{\pm}, \\ \phi_- : \mathbb{S}^0 & \longrightarrow & X_0 \\ & \pm 1 \longmapsto & x_{\mp}. \end{array}$$

Formons le pushout :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_+^0 \amalg \mathbb{S}_-^0 & \xrightarrow{\phi_+ + \phi_-} & X_0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{D}_+^1 \amalg \mathbb{D}_-^1 & \longrightarrow & X_1 \cong \mathbb{S}^1 \end{array}.$$

- (c) De manière semblable, on obtient une décomposition CW de  $\mathbb{S}^1$  de la forme  $X_0 \hookrightarrow X_1 \cong \mathbb{S}^1$  avec  $X_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Posons  $X = \mathbb{S}^2$ .

- (a) Posons  $X_0 = \{x_0\}$  et  $\mathcal{J}_0 = \emptyset$ . On a alors  $X_1 = X_0$ . Puis, considérons  $\mathcal{J}_1 = \{1\}$  et  $\phi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_1$  est la seule application continue possible. Formons le pushout :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\phi_1} & X_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & X_2 \end{array}$$

où

$$X_2 = \{x_0\} \amalg \mathbb{D}^2 / [z \sim x_0, \forall z \in \mathbb{S}^1] \cong \mathbb{S}^2.$$

- (b) On utilise la décomposition CW de  $\mathbb{S}^1$  du point 1. (a). On pose  $X_0 = \{x_0\}$ ,  $X_1 = \mathbb{S}^1$ ,  $\partial_2 = \{+, -\}$  où  $\phi_+ = \phi_- = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ . Formons le pushout :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_+^1 \amalg \mathbb{S}_-^1 & \xrightarrow{\phi_+ + \phi_-} & X_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{D}_+^2 \amalg \mathbb{D}_-^2 & \longrightarrow & X_2 \cong \mathbb{S}^2 \end{array}$$

3. Posons  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , le tore creux. Rappelons que  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  est un quotient de  $I \times I$ . Posons  $X_0 = \{x_0\}$ ,  $X_1 = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ . Alors :

$$\begin{array}{ccc} \partial(I \times I) \cong \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & X_1 = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ I \times I \cong \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & X_2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \end{array}$$

**5.1.4 Lemme.** Tout CW-complexe est un espace normal et localement connexe par arcs.

Démonstration. *Voire la Série 10.* □

**5.1.5 Propriété** (Cruciale). Soit  $K$  un espace topologique compact et  $X$  un CW-complexe de décomposition CW  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Alors pour tout application continue  $f : K \rightarrow X$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Im } f \subseteq X_n$ .

Démonstration. *Comme  $f$  est continue, on a que  $\text{Im } f$  est compact. On va utiliser la caractérisation de la compacité par la PIF pour arriver à une contradiction si  $\nexists n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Im } f \subseteq X_n$ . Supposons donc que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $\text{Im } f \not\subseteq X_n$ . Ainsi,  $\forall n, \exists x_n \in \text{Im } f$  tel que  $x_n \notin X_n$ . Puisque  $X_m \subseteq X_n$  si  $m \leq n$ , on a que  $x_n \notin X_m$  pour tout  $m \leq n$ . Par conséquent,  $\forall n$  on a  $\sharp(X_n \cap \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}) < n$ . Puisque le singleton  $\{x_k\}$  est fermé  $\forall k$ , on sait que  $X_n \cap \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est aussi fermé dans  $X_n$  pour tout  $n$  et donc  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est fermé dans  $X$  par la définition de la topologie de l'adhérence finie. Considérons maintenant*

$$\mathcal{C} = \{\{x_k\}_{k \geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

*C'est une collection de partie fermés de  $X$  vérifiant la PIF mais telle que  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$ . Ainsi,  $\text{Im } f$  n'est pas compact ce qui est absurde.* □

Penchons nous maintenant sur le cas relatif :

**5.1.6 Définition** (CW-complexe relatif). Un couple d'espaces  $(X, A) \in \mathbf{Top}_{\text{rel}}$  est un **CW-complexe relatif** s'il existe une suite d'espaces topologiques  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  appelée **décomposition CW de  $(X, A)$**  et qui est telle que :

1. On a

$$X_0 = A \amalg X'_0$$

où  $X'_0$  est discret.

2. On a les inclusions :

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \dots$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un ensemble d'indices  $\mathcal{J}_n$  et une famille d'applications continues  $\{\phi_j : \mathbb{S}^n \rightarrow X_n\}_{j \in \mathcal{J}_n}$  telle que

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in \mathcal{J}_n} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} \phi_j} & X_n \\ \downarrow & \lrcorner \tilde{\phi} & \downarrow \\ \coprod_{j \in \mathcal{J}_n} \mathbb{D}^n & \xrightarrow{\quad} & X_{n+1} \end{array} .$$

4. On a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \cong X$$

où  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  est muni de la topologie de l'adhérence finie.

En fait, le seul point qui change de la définition d'un CW-complexe est la définition du 0-squelette  $X_0$ .

- 5.1.7 Remarques.**
1. Si  $(X, A)$  est un CW-complexe relatif, alors  $A \hookrightarrow X$  est une cofibration.
  2.  $\dim(X, A) = n$  si et seulement si  $X \cong X_n$ .
  3. Le couple  $(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$  est un CW-complexe relatif. En voici une décomposition CW :

$$X_0 = \cdots = X_n = \mathbb{S}^n \quad \text{et}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{S}^n}} & \mathbb{S}^n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{D}^{n+1} & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{D}^{n+1}}} & \mathbb{D}^{n+1} \end{array} .$$

## 5.2 HELP et ses conséquences

Une généralisation (assez massive) de la PEH des cofibrations. On a besoin de la notion suivante :

**5.2.1 Définition** ( $n$ -équivalence). Une application basée  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  est une  $n$ -équivalence si  $\pi_k f : \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, y_0)$  est un isomorphisme  $\forall k < n$  et une surjection si  $k \leq n$ .

**5.2.2 Remarque.** Une application  $f$  est une  $n$ -équivalence  $\forall n \in \mathbb{N}$  si et seulement si c'est une équivalence faible.

Voici l'exemple le plus important d'une  $n$ -équivalence :

**5.2.3 Théorème.** L'inclusion  $j : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$  est une  $n$ -équivalence, i.e.  $\pi_k \mathbb{S}^n = 0$  si  $k < n$  (cela suffit car  $\mathbb{D}^n$  est contractile).

Démonstration, esquisse. *Référence : [Lundell, Weingram : The Topology of CW-complexes, Chap. II.8]. La clé de l'argument est d'appliquer le lemme de Lebesgue à  $\text{Im } f$  où  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ , avec  $k < n$ .*

L'idée est que si  $k < n$ , alors  $\forall f : (\mathbb{S}^k, z_0) \rightarrow (\mathbb{S}^n, z_0)$ , on peut construire  $f' : (\mathbb{S}^k, z_0) \rightarrow (\mathbb{S}^n, z_0)$  telle que  $f \simeq_* f'$  et que  $f'$  ne soit pas surjective. On a donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^k & \hookrightarrow & \mathbb{S}^n \setminus \{z_1\} \simeq \{z_0\} \\ & \searrow & \downarrow f' \\ & & \mathbb{S}^n \end{array}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} f' \simeq_* c_{z_0} &\implies [f']_* = [c_{z_0}]_* \\ &\implies \pi_k \mathbb{S}^n = \{[c_{z_0}]_*\}. \end{aligned}$$

□

De manière semblable :

**5.2.4 Théorème.** Soit  $(X, A)$  un CW-complexe relatif. Alors l'inclusion  $X_n \hookrightarrow X$  est une  $n$ -équivalence  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Donc  $\pi_k X = \pi_k X_n$  si  $k \leq n$ .

Démonstration, esquisse. Il s'agit là du même genre d'argument de topologie générale que dans la démonstration précédente. On utilise de plus le fait que  $\forall f : \mathbb{S}^k \rightarrow X$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Im } f \subseteq X_n$ . □

**5.2.5 Théorème** (Homotopy Extention Lifting Property, HELP). Soit  $(X, A)$  un CW-complexe relatif de dimension au plus  $n$ . Soit  $e : Y \rightarrow Z$  une  $n$ -équivalence. Alors  $\forall f : X \rightarrow Z, \forall g : A \rightarrow Y$  et  $\forall H : A \times I \rightarrow Z$  des application continues telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_0} & A \times I & \xleftarrow{i_1} & A \\ j \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z & \xleftarrow{e} & Y \end{array}$$

i.e.  $H$  est une homotopie de  $f \circ j$  vers  $e \circ g$ . Alors  $\exists \hat{g} : X \rightarrow Y$  et  $\exists \hat{H} : X \times I \rightarrow Z$  telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{i_0} & A \times I & \xleftarrow{i_1} & A \\ & \nearrow j & \downarrow j & & \downarrow j \times \text{Id}_I & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Z & \xleftarrow{e} & Y & & X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xleftarrow{i_1} & X \end{array}$$

*(Note: In the original diagram, there are additional arrows: a diagonal arrow from X to X, a dashed arrow from Z to X labeled H-hat, and a dashed arrow from Y to X labeled g-hat.)*

i.e.  $\hat{g} \circ j = g$  ( $\hat{g}$  est une extension de  $g$ ),  $\hat{H} \circ (j \times \text{Id}_I) = H$  ( $\hat{H}$  est une extension de  $H$ ) et  $\hat{H}$  est une homotopie de  $f$  vers  $e \circ \hat{g}$ .

Démonstration. Référence : [May].

□

Cas spécial :

**5.2.6 Exemple.** Posons  $Y = Z$  et  $e = \text{Id}_Y$ . Alors si le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_0} & A \times I & \xleftarrow{i_1} & A \\ j \downarrow & & H \downarrow & \swarrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & & \end{array},$$

alors, par HELP, on a

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{i_0} & A \times I & \xleftarrow{i_1} & A \\ & \nearrow j & \downarrow j & & \downarrow H & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Z & \xleftarrow{e} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow j \times \text{Id}_I & & \downarrow j \times \text{Id}_I & & \downarrow j \\ & & X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xleftarrow{i_1} & X \\ & & & & \swarrow \hat{H} & & \swarrow \hat{g} \end{array}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{f+H} & Y \\ \downarrow & \nearrow \exists \hat{H} & \\ X \times I & & \end{array}$$

i.e. la PEH car  $j$  est une cofibration. Donc dans ce cas, HELP se réduit à la PEH de la cofibration  $j$ .

Voyons maintenant les conséquences de HELP :

**5.2.7 Théorème** (de Whitehead I). Si  $X$  est un CW-complexe et si  $e : Y \rightarrow Z$  est une  $n$ -équivalence, alors  $e_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$  est une bijection si  $\dim X < n$  et une surjection si  $\dim X \leq n$ . On obtient un résultat similaire avec des espaces pointés.

Démonstration. On démontre ici le cas non pointé.

- Montrons que  $e_*$  est surjective. Soit  $[f] \in [X, Z]$ . A voire,  $\exists [\hat{g}] \in [X, Y]$  telle que  $e_*([\hat{g}]) = [f]$ . Appliquons HELP :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \emptyset & \xrightarrow{\cong} & \emptyset \times I & \xleftarrow{\cong} & \emptyset \\ & \nearrow ! & \downarrow ! & & \downarrow ! & & \downarrow ! \\ X & \xrightarrow{f} & Z & \xleftarrow{e} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow j \times \text{Id}_I & & \downarrow j \times \text{Id}_I & & \downarrow j \\ & & X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xleftarrow{i_1} & X \\ & & & & \swarrow \hat{H} & & \swarrow \hat{g} \end{array}$$

i.e.  $\hat{H}$  est une homotopie de  $f$  vers  $e \circ \hat{g}$ , donc  $[f] = [e \circ \hat{g}] = e_*([\hat{g}])$  et  $e_*$  est surjective.

- Montrons l'injectivité de  $e_*$  quand  $\dim X < n$ . Remarquons que si  $\dim X = m$ , alors  $\dim(X \times I) = m + 1$  car

$$(X \times I)_k = (X_k \times \{0\}) \amalg (X_k \times \{1\}) \amalg (X_{k-1} \times ]0, 1[) / \sim$$

voire série 10. Soient  $g_0, g_1 : X \rightarrow Y$  tels que  $e_*([g_0]) = e_*([g_1])$ . A voire :  $[g_0] = [g_1]$ . Il existe une homotopie  $F : X \times I \rightarrow Z$  de  $e \circ g_0$  vers  $e \circ g_1$ . Appliquons HELP à  $(X \times I, X \times \partial I)$  (c'est un CW-complexe relatif de dimension au plus  $n$ ) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times \partial I & \xleftarrow{i_0} & X \times \partial I \times I & \xleftarrow{i_1} & X \times \partial I & & \\
 & \nearrow j & \downarrow j & & \downarrow j \times \text{Id}_I & & \downarrow j & & \\
 X \times \partial I & \xrightarrow{F} & Z & \xleftarrow{e} & Y & \xleftarrow{g_0 \amalg g_1} & X \times \partial I & & \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow \widehat{H} & \downarrow & \swarrow \widehat{g} & \downarrow & & \\
 & & X \times I & \xleftarrow{i_0} & X \times I \times I & \xleftarrow{i_1} & X \times I & & 
 \end{array}$$

où  $H(x, i, t) = e \circ g_1(x) = F(x, i)$ . On a donc

$$\widehat{g} \circ j = g_0 + g_1 \iff \begin{cases} \widehat{g}(x, 0) = (g_0 + g_1)(x, 0) = g_0(x) \\ \widehat{g}(x, 1) = (g_0 + g_1)(x, 1) = g_1(x) \end{cases}.$$

Donc  $\widehat{g}$  est une homotopie de  $g_0$  vers  $g_1$ , ce qui implique que  $[g_0] = [g_1]$ . Ainsi,  $e_*$  est injective et donc bijective. □

**5.2.8 Remarque.** Si  $e : Y \rightarrow Z$  est une  $n$ -équivalence, alors  $\pi_k e : [\mathbb{S}^k, Y] \rightarrow [\mathbb{S}^k, Z]$  est une bijection si  $k < n$  et une surjection si  $k \leq n$ .

**5.2.9 Corollaire.** Si  $e : Y \rightarrow Z$  est une équivalence faible, alors  $e_* : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$  est une bijection pour tout  $X$  un CW-complexe de dimension finie.

**5.2.10 Théorème** (de Whitehead II). Soient  $Y, Z$  deux CW-complexes tels que  $\dim Y, \dim Z \leq n$ . Alors si  $e : Y \rightarrow Z$  est une  $n$ -équivalence, c'est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. On applique le théorème de Whitehead I au cas  $X = Z$ . Alors  $e_* : [Z, Y] \rightarrow [Z, Z]$  est une bijection. En particulier,  $\exists! [f] \in [Z, Y]$  tel que  $e_*([f]) = [e \circ f] = [\text{Id}_Z]$ . Donc  $e \circ f \sim \text{Id}_Z$ . Affirmation :  $f \circ e \sim \text{Id}_Y$  et donc  $f$  est un inverse homotopique de  $e$ . Observer que puisque  $e$  est une  $n$ -équivalence, on a que  $\text{Id}_{\pi_k Z} = \pi_k \text{Id}_Z = \pi_k (e \circ f) = \pi_k e \circ \pi_k f$  pour tout  $k < n$ . Donc  $\pi_k f$  est un isomorphisme. Ainsi,  $f$  est une  $(n-1)$ -équivalence. Par le théorème de Whitehead I appliqué à  $X = Y$ , on a que  $f_* : [Y, Z] \rightarrow [Y, Y]$  est au moins surjectif. Par conséquent,  $\exists [e'] \in [Y, Z]$  tel que  $f_*([e']) = [f \circ e'] = [\text{Id}_Y]$ . Donc  $f \circ e' \sim \text{Id}_Y$ . Puis

$$e = e \circ \text{Id}_Y \sim e \circ f \circ e' \sim \text{Id}_Z \circ e' = e'.$$

Donc  $f \circ e \sim f \circ e' \sim \text{Id}_Y$ . □

**5.2.11 Corollaire.** Toute équivalence faible entre deux CW-complexes est une équivalence d'homotopie.

### 5.3 Approximation cellulaire

Le but de cette section est de montrer que les CW-complexes et les applications qui respectent leur structure cellulaire sont partout.

**5.3.1 Définition** (Application cellulaire). Soient  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  deux CW-complexes relatifs. Une application  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est dite **cellulaire** si  $f(X_n) \subseteq Y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**5.3.2 Définition** (CW-approximation). Soit  $(X, A)$  un couple d'espaces. Une **CW-approximation** de  $(X, A)$  consiste en un CW-complexe relatif  $(\tilde{X}, \tilde{A})$  muni d'une équivalence faible  $(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow (X, A)$ .

**5.3.3 Théorème** (Tout est CW! (Tout!)). Soit  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  une application entre deux couples d'espaces. Alors il existe une application cellulaire  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{B})$  telle que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ (\tilde{X}, \tilde{A}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{Y}, \tilde{B}) \end{array} .$$

Démonstration, esquisse. • *Existence des CW-approximations.* On construit explicitement  $(\tilde{X}, \tilde{A})$  par récurrence :

- d'abord, un ÉNORME wedge de sphères dont l'homotopie surjecte sur  $\pi_* X$ ,
- ensuite, dimension par dimension, on rajoute des disques  $\mathbb{D}^n$  pour "tuer l'homotopie en trop". Rappelons que  $Z_n \hookrightarrow Z$  est une cofibration pour tout CW-complexe  $Z$ .
- *Existence de remplacements cellulaires d'applications.* Soit  $g : W \rightarrow Z$  une application entre deux CW-complexes  $W$  et  $Z$ . On construit  $\tilde{g}$  et l'homotopie par récurrence sur la dimension des cellules de  $W$  à l'aide de HELP et du fait que  $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$  est une  $n$ -équivalence.
- *Existence d'au moins une application  $\hat{f} : (\tilde{x}, \tilde{A}) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{B})$  telle que  $\beta \circ \hat{f} \sim f \circ \alpha$ .* On utilise Whitehead. Voir la série 11.

□

# Chapitre 6

## Homologie

Le but de ce chapitre est de définir les groupes d'homologie ordinaire  $H_*(-; \mathbb{Z})$ .

### 6.1 Produit symétrique infini

On présente ici le dernier invariant homotopique dont nous avons besoin pour définir l'homologie.

**6.1.1 Définition** (*ComTopMon*). On note *ComTopMon* la catégorie des monoïdes topologiques abéliens, i.e. la catégorie des monoïdes abéliens  $(A, \mu, a_0)$  muni d'une topologie rendant la multiplication  $\mu$  continue et basé en  $a_0$ .

- 6.1.2 Exemples.**
1. Tout groupe abélien  $(G, +)$  muni de la topologie discrète et basé en  $0_G$  est un monoïde topologique abélien.
  2. Les lacets de Moore  $\Omega_M X$  d'un espace basé  $(X, x_0)$  forme un monoïde topologique non abélien.
  3.  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$  muni de la multiplication complexe.
  4.  $(\mathbb{R}^n, +)$ .

**6.1.3 Définition** (Produit symétrique infini). – Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(X, x_0)$  un espace topologique basé. Définissons une relation d'équivalence sur  $X^n$  :

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \iff \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ tel que } (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (y_1, \dots, y_n).$$

Posons

$$\mathrm{SP}^n(X, x_0) = (X^n / \sim, [x_0, \dots, x_0]) = (X, x_0)^n / \mathfrak{S}_n.$$

Soit  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  une application continue. Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{SP}^n f : \mathrm{SP}(X, x_0) &\longrightarrow \mathrm{SP}^n(Y, y_0) \\ [x_1, \dots, x_n] &\longmapsto [f(x_1), \dots, f(x_n)]. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\mathrm{SP}^n f$  est bien définie, continue et basée. De plus,  $\mathrm{SP}^n(g \circ f) = \mathrm{SP}^n g \circ \mathrm{SP}^n f$  et  $\mathrm{SP}^n \mathrm{Id}_{(X, x_0)} = \mathrm{Id}_{\mathrm{SP}^n(X, x_0)}$ . Ainsi, on a un foncteur

$$\mathrm{SP}^n : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}_*.$$

– Remarquons que  $(X, x_0) = \text{SP}^1(X, x_0)$ . Définissons

$$\begin{aligned} \iota_n : \text{SP}^n(X, x_0) &\longrightarrow \text{SP}^{n+1}(X, x_0) \\ [x_1, \dots, x_n] &\longmapsto [x_0, x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\iota_n$  est un plongement. On a donc une suite de plongements

$$(X, x_0) = \text{SP}^1(X, x_0) \xrightarrow{\iota_1} \text{SP}^2(X, x_0) \xrightarrow{\iota_2} \text{SP}^3(X, x_0) \xrightarrow{\iota_3} \dots$$

– Posons

$$\text{SP}(X, x_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \text{SP}^n(X, x_0)$$

muni de la topologie de l'adhérence finie et basé en  $[x_0] = [x_0, x_0] = [x_0, \dots, x_0]$ . Observons que  $w \in \text{SP}(X, x_0)$  si et seulement si  $\exists n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in X$  tels que  $w = [x_1, \dots, x_n]$ . Posons

$$\begin{aligned} \text{SP}(X, x_0) \times \text{SP}(X, x_0) &\longrightarrow \text{SP}(X, x_0) \\ ([x_1, \dots, x_n], [x'_1, \dots, x'_{n'}]) &\longmapsto [x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_{n'}]. \end{aligned}$$

C'est une application continue et basée qui définit une multiplication associative, unitaire et commutative. Ainsi,

$$\text{SP}(X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{ComTopMon}.$$

– Soit  $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  une application continue. Posons

$$\begin{aligned} \text{SP } f : \text{SP}(X, x_0) &\longrightarrow \text{SP}(Y, y_0) \\ [x_1, \dots, x_n] &\longmapsto [f(x_1), \dots, f(x_n)]. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\text{SP } f$  est continue, basée et compatible avec les multiplications de  $\text{SP}(X, x_0)$  et  $\text{SP}(Y, y_0)$ . Ainsi,  $\text{SP } f \in \text{Mor } \mathbf{ComTopMon}$ . De plus,  $\text{SP}$  préserve les composition et les identités. Ainsi, on a un foncteur

$$\text{SP} : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{ComTopMon}.$$

Le **produit symétrique infini** d'un espace  $(X, x_0)$  est le monoïde topologique abélien  $\text{SP}(X, x_0)$ .

**6.1.4 Proposition.** Le foncteur  $\text{SP}$  est un invariant homotopique.

Démonstration. *Etant donné  $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  deux applications continues homotopes par une homotopie  $H : X \times I \longrightarrow Y$ , on considère la composition*

$$\begin{aligned} \text{SP}(X, x_0) \times I &\longrightarrow \text{SP}(X \times I, (x_0, 0)) \longrightarrow \text{SP}(Y, y_0) \\ ([x_1, \dots, x_n], t) &\longmapsto [(x_1, t), \dots, (x_n, t)] \end{aligned}$$

*Cette construction va nous donner une homotopie basée de  $\text{SP } f$  vers  $\text{SP } g$  dans  $\mathbf{ComTopMon}$ .*  $\square$

**6.1.5 Remarques.** • L'espace  $\text{SP}(X, x_0)$  est le monoïde abélien libre sur  $(X, x_0)$ , i.e.

$$\mathbf{ComTopMon}(\text{SP}(X, x_0), (A, \mu, a_0)) \cong \mathbf{Top}_*((X, x_0), (A, a_0)).$$

• Si  $(X, x_0)$  est un CW-complexe, alors  $\text{SP}(X, x_0)$  est aussi naturellement un CW-complexe qui est tel que  $\mu$  (la multiplication de  $\text{SP}(X, x_0)$ ) soit cellulaire.

## 6.2 Propriétés de SP

**6.2.1 Notation.** Notons  $\eta_X : (X, x_0) \longrightarrow \text{SP}(X, x_0)$  l'inclusion évidente (car,  $(X, x_0) = \text{SP}^1(X, x_0)$ ).

**6.2.2 Proposition.** L'application  $\eta_{\mathbb{S}^1} : (\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \text{SP}(\mathbb{S}^1, 1)$  est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit  $(A, \mu, a_0) \in \text{Obj ComTopMon}$ . Posons

$$\begin{aligned} m_A : \text{SP}(A, a_0) &\longrightarrow (A, a_0) \\ [a_1, \dots, a_n] &\longmapsto \prod_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

Cette application est bien définie, continue, basée et multiplicative. De plus,  $m_A \circ \eta_A = \text{Id}_A$ . Ainsi,  $m_{\mathbb{S}^1} \circ \eta_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ . Il reste à voir que  $\eta_{\mathbb{S}^1} \circ m_{\mathbb{S}^1} \sim \text{Id}_{\text{SP}(\mathbb{S}^1, 1)}$ . Or :

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{S}^1} \circ m_{\mathbb{S}^1}([z_1, \dots, z_n]) &= \eta_{\mathbb{S}^1} \left( \prod_{i=1}^n z_i \right) \\ &= \left[ \prod_{i=1}^n z_i \right] \\ &= \left[ \prod_{i=1}^n z_i, 1, \dots, 1 \right]. \end{aligned}$$

Définissons alors

$$\begin{aligned} H : \text{SP}(\mathbb{S}^1, 1) \times I &\longrightarrow \text{SP}(\mathbb{S}^1, 1) \\ ([z_1, \dots, z_n], t) &\longmapsto \left[ z_1 \cdot \left( \prod_{i=2}^n z_i \right)^t, z_2^{1-t}, \dots, z_n^{1-t} \right]. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $H$  est bien une homotopie et  $\text{Id}_{\text{SP}(\mathbb{S}^1, 1)}$  vers  $\eta_{\mathbb{S}^1} \circ m_{\mathbb{S}^1}$ . □

**6.2.3 Définition** (Quasi-fibration). Une application continue  $p : Y \longrightarrow Z$  est une **quasi-fibration** si  $\forall z_0 \in Z$  et  $\forall y \in p^{-1}(z_0)$  on a que

$$\begin{aligned} p_* : \pi_n(Y, p^{-1}(z_0), y_0) &\longrightarrow \pi_n(Z, \{z_0\}, z_0) \\ [f] &\longmapsto [p \circ f] \end{aligned}$$

est un isomorphisme  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**6.2.4 Remarque.** Si  $p : Y \longrightarrow Z$  est une quasi-fibration, alors la longue suite exacte du couple

$(Y, p^{-1}(z_0))$  devient :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & & \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 & \pi_n(Y, p^{-1}(z_0)) = \pi_n Z & \longrightarrow & \pi_n p^{-1}(z_0) & \longrightarrow & \pi_n Y & \\
 & & & & \dots & & \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 & \pi_1 Z & \longrightarrow & \pi_1 p^{-1}(z_0) & \longrightarrow & \pi_1 Y & \\
 & & & & \dots & & \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 & \pi_0 Z & \longrightarrow & \pi_0 p^{-1}(z_0) & \longrightarrow & \pi_0 Y & \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

**6.2.5 Théorème** (Dold - Thom). Soit  $X$  un espace de Hausdorff. Soit  $A \subseteq X$  un sous espace connexe par arcs. Si  $A \hookrightarrow X$  est une cofibration, alors l'application quotient  $q : X \rightarrow X/A$  induit une quasi-fibration  $\text{SP } q : \text{SP } X \rightarrow \text{SP}(X/A)$ . En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\pi_n(\text{SP } X, \text{SP } A) \cong \pi_n \text{SP}(X/A).$$

On a donc une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1} \text{SP } X & \longrightarrow & \pi_{n+1} \text{SP}(X/A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & \\
 \curvearrowright & & & & & & \\
 & \pi_n \text{SP } A & \longrightarrow & \pi_n \text{SP } X & \longrightarrow & \dots & 
 \end{array}$$

**6.2.6 Exemple** (Cas spécial). Soit  $X, Y \in \text{Obj Top}$  deux espaces de Hausdorff où  $Y$  est connexe par arcs et  $f : X \rightarrow Y$ . Considérons le pushout

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \iota_X \downarrow & \lrcorner & \downarrow i_f \\
 CX & \longrightarrow & Cf \\
 & & \downarrow \\
 & & Cf/Y \simeq \Sigma X
 \end{array}$$

Appliquons le théorème de Dold - Thom à  $i_f$  :

$$\pi_n(\text{SP } Cf, \text{SP } Y) \cong \pi_n \text{SP}(\Sigma X).$$

Si  $Y = X$  et si  $f = \text{Id}_X$ , alors  $Cf = CX$  et  $\pi_n(\text{SP } CX, \text{SP } X) \cong \pi_n \text{SP } \Sigma X$ . On obtient alors une

longue suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \cdots & \\
 & \curvearrowright & & & & & \\
 & \pi_{n+1} \text{ SP } X & \longrightarrow & \pi_{n+1} \text{ SP } CX & \longrightarrow & \pi_{n+1} \text{ SP } \Sigma X & \\
 & & & & & & \\
 & \curvearrowright & & & & & \\
 & \pi_n \text{ SP } X & \longrightarrow & \cdots & & & 
 \end{array}$$

Or  $CX$  est contractile, ce qui entraîne que  $\text{SP } CX$  est contractile et donc que  $\pi_n \text{ SP } CX = 0$ . Ainsi,

$$\pi_{n+1} \text{ SP } \Sigma X \cong \pi_n \text{ SP } X.$$

### 6.3 Définition de l'homologie

On va d'abord parler d'homologie réduite d'un espace pointé.

#### 6.3.1 Le cas pointé

**6.3.1 Définition** (Groupe d'homologie réduite). Le  $n$ -ième **groupe d'homologie réduite** d'un espace pointé  $(X, x_0)$  est défini par :

$$\tilde{H}_n(X, x_0) = \pi_{n+1} \text{ SP } \Sigma \tilde{X}$$

où  $\tilde{X}$  est une CW-approximation de  $X$ .

#### 6.3.2 Remarques.

1. La valeur de  $\tilde{H}_n$  ne dépend pas de la CW-approximation choisie.
2. On suspend  $\tilde{X}$  afin de pouvoir appliquer le théorème de Dold - Thom plus tard. En effet,  $\Sigma Y$  est connexe par arcs pour tout espace  $Y \in \text{Obj } \mathbf{Top}$ .
3. Comme  $\tilde{X}$  est un CW-complexe, on a que  $\Sigma \tilde{X}$  est aussi un CW-complexe. En effet,  $\Sigma \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$  et  $\Sigma \mathbb{D}^n \cong \mathbb{D}^{n+1}$ .

On se retrouve donc dans la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{CW}_* & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbf{CW}_* & \xrightarrow{\text{SP}} & \mathbf{CW}_* \cap \mathbf{ComTopMon} \\
 & \searrow & & & \downarrow \pi_{n+1} \\
 & & & & \mathbf{Ab} \\
 & & \tilde{H}_n & \searrow & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

**6.3.3 Axiomes** (Eilenberg - Steenrod pour une théorie d'homologie réduite). **(H1)** Exactitude : Soient  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$  et  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Alors on a une suite exacte

$$\tilde{H}_n X \xrightarrow{\tilde{H}_n f} \tilde{H}_n Y \xrightarrow{\tilde{H}_n i_f} \tilde{H}_n C f$$

**(H2)** Suspension : Soit  $(X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ . Alors

$$\tilde{H}_n X \cong \tilde{H}_{n+1} \Sigma X.$$

### 6.3. DÉFINITION DE L'HOMOLOGIE

(**H3**) Additivité : Pour toute collection  $\{(X_j, x_j)\}_{j \in \mathcal{J}} \subset \text{Obj } \mathbf{Top}_*$ , les inclusions  $X_i \hookrightarrow \bigvee_{j \in \mathcal{J}} X_j$  induisent un isomorphisme

$$\bigoplus_{j \in \mathcal{J}} \tilde{H}_n X_j \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n \left( \bigvee_{j \in \mathcal{J}} X_j \right).$$

(**H4**) Invariance : Si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  est une équivalence faible, alors  $\tilde{H}_n f : \tilde{H}_n X \rightarrow \tilde{H}_n Y$  est un isomorphisme.

(**H5**) Dimension : On a :

$$\tilde{H}_n \mathbb{S}^0 = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

**6.3.4 Remarque.** Une analogie duale à l'axiome (**H2**) est que  $\pi_n X \cong \pi_{n-1} \Omega X$ .

**6.3.5 Théorème.** L'ensemble  $\{\tilde{H}_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les axiomes d'Eilenberg - Steenrod d'une théorie d'homologie réduite ordinaire.

Démonstration. (**H1**) : Soient  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$  et  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Soient  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  des CW-approximations de  $X$  et  $Y$  respectivement. Alors on sait par le théorème 5.3.3 qu'il existe une application cellulaire  $\tilde{f}$  telle que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \end{array}.$$

On applique le théorème 4.2.4 pour avoir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \searrow j_{\tilde{f}} & & \nearrow p_{\tilde{f}} \\ & M_{\tilde{f}} & \\ & \searrow & \\ & & M_{\tilde{f}}/\tilde{X} \cong C\tilde{f} \end{array}$$

où  $p_{\tilde{f}}$  est une équivalence d'homotopie. Appliquons  $\Sigma$  :

$$\Sigma \tilde{X} \longrightarrow \Sigma M_{\tilde{f}} \longrightarrow \Sigma C\tilde{f}.$$

Par le théorème de Dold - Thom, on a une longue suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\pi_{n+1} \text{SP } \Sigma \tilde{X}}_{\tilde{H}_n X} \longrightarrow \underbrace{\pi_{n+1} \text{SP } \Sigma M_{\tilde{f}}}_{\tilde{H}_n Y} \longrightarrow \underbrace{\pi_{n+1} \text{SP } \Sigma C\tilde{f}}_{\tilde{H}_n C\tilde{f} = \tilde{H}_n C f} \longrightarrow \cdots$$

( $\tilde{\mathbf{H2}}$ ) : On sait que

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n X &= \pi_{n+1} \text{SP } \Sigma \tilde{X} \\ &\cong \pi_{n+2} \text{SP } \Sigma \Sigma X \\ &= \tilde{H}_{n+1} \Sigma X.\end{aligned}$$

( $\tilde{\mathbf{H3}}$ ) : Montrons que  $\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n X \oplus \tilde{H}_n Y$ . On a :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X \vee Y & \xrightarrow{j} & (X \vee Y)/X = Y \\ Y & \xrightarrow{q} & X \vee Y & \xrightarrow{r} & (X \vee Y)/Y = X \end{array}$$

Par le théorème de Dold - Thom, on a que les suites suivantes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_n X & \xrightarrow{\tilde{H}_n i} & \tilde{H}_n(X \vee Y) & \xrightarrow{\tilde{H}_n j} & \tilde{H}_n Y \\ \tilde{H}_n Y & \xrightarrow{\tilde{H}_n q} & \tilde{H}_n(X \vee Y) & \xrightarrow{\tilde{H}_n r} & \tilde{H}_n X \end{array}$$

Par ailleurs, comme  $r \circ i = \text{Id}_X$  et  $q \circ j = \text{Id}_Y$ , on a que les deux suites sont scindées. Donc  $\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n X \oplus \tilde{H}_n Y$ . On conclut par récurrence transfinie.

( $\tilde{\mathbf{H4}}$ ) : Soit  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  est une équivalence faible. Soient  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  des CW-approximations de  $X$  et  $Y$  respectivement. Alors on sait par le théorème 5.3.3 qu'il existe une application cellulaire  $\tilde{f}$  telle que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \end{array}$$

Donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on a que  $\pi_k \beta \circ \pi_k \tilde{f} = \pi_k f \circ \pi_k \alpha$ . Donc  $\pi_k \tilde{f}$  est un isomorphisme  $\forall k \in \mathbb{N}$  et donc  $\tilde{f}$  est une équivalence faible. Or  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont des CW-complexes, ce qui entraîne que  $\tilde{f}$  est une équivalence d'homotopie par le théorème de Whitehead. Donc  $\Sigma \tilde{f}$  et  $\text{SP } \Sigma \tilde{f}$  sont aussi des équivalences d'homotopie. Par conséquent,  $\tilde{H}_n f = \pi_{n+1} \text{SP } \Sigma \tilde{f}$  est un isomorphisme.

( $\tilde{\mathbf{H5}}$ ) : En utilisant le fait que  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \text{SP } \mathbb{S}^1$  est une équivalence d'homotopie, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n \mathbb{S}^0 &= \pi_{n+1} \text{SP } \Sigma \mathbb{S}^0 \\ &= \pi_{n+1} \text{SP } \mathbb{S}^1 \\ &= \pi_{n+1} \mathbb{S}^1 \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

□

**6.3.6 Remarques.** 1. En commençant par les valeurs de  $\tilde{H}_n \mathbb{S}^0$  d'où l'on déduit que

$$\tilde{H}_k \mathbb{S}^n = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on peut calculer l'homologie réduite  $\tilde{H}_* X$  récursivement comme suit :

### 6.3. DÉFINITION DE L'HOMOLOGIE

- On choisit  $\tilde{X}$  une CW-approximation de  $X$ .
- Comme  $\tilde{X}_0$  est discret, on a que  $\tilde{X}_0 \cong \coprod_{j \in \mathcal{J}} \mathbb{S}^0$  pour un certain ensemble  $\mathcal{J}$  de même cardinalité que  $\tilde{X}_0$ . Puis, par **(H3)**, on a que

$$\tilde{H}_n \tilde{X}_0 = \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} \tilde{H}_n \mathbb{S}^0.$$

- Supposons que  $\tilde{H}_* \tilde{X}_k$  sont connus  $\forall k \leq n$ . On a un pushout :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{S}_\alpha^n & \longrightarrow & \tilde{X}_n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{D}_\alpha^{n+1} & \longrightarrow & \tilde{X}_{n+1} \end{array}$$

Comme tous ces espaces sont pointés, on peut réécrire :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bigvee_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{S}_\alpha^n & \longrightarrow & \tilde{X}_n \\ & \swarrow & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{S}_\alpha^n) & \xleftarrow{\cong} & \bigvee_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{D}_\alpha^{n+1} & \longrightarrow & \tilde{X}_{n+1} \cong Cf \end{array}$$

Donc par l'axiome **(H1)** et la suite de Dold - Puppe, on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ & & & & \tilde{H}_{k+1}(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{S}_\alpha^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k+1} \tilde{X}_n & \longrightarrow & \tilde{H}_{k+1} \tilde{X}_{n+1} & & \\ & & & & \curvearrowleft & & \\ & & & & \tilde{H}_k(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{S}_\alpha^n) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Ainsi, si  $k \neq n, n-1$ , on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_{n+1} \tilde{X}_n & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n+1} \tilde{X}_{n+1} & & \\ & & \curvearrowleft & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Si  $k = n$ , alors on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_{n+1} \tilde{X}_n & \longrightarrow & \tilde{H}_{n+1} \tilde{X}_{n+1} & & \\ & & \curvearrowleft & & & & \\ & & \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \tilde{H}_n \tilde{X}_n & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Si  $k = n - 1$ , alors on a

$$\begin{array}{c}
 \dots \longrightarrow \tilde{H}_{n+1}\tilde{X}_{n+1} \\
 \searrow \\
 \bigoplus_{j \in \mathcal{X}} \mathbb{Z} \xrightarrow{a} \tilde{H}_n\tilde{X}_n \longrightarrow \tilde{H}_n\tilde{X}_{n+1} \\
 \searrow \\
 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Donc  $\tilde{H}_n\tilde{X}_{n+1}$  est un quotient de  $\tilde{H}_n\tilde{X}_n$  dont la valeur dépend de  $a$ . On a  $\tilde{H}_*\tilde{X} = \tilde{H}_*X$ .

2. L'analyse ci-dessus montre que  $\forall (X, x_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}_*$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ , les groupes  $\tilde{H}_n X$  sont entièrement déterminés par les axiomes  $(\tilde{\mathbf{H1}})$  à  $(\tilde{\mathbf{H5}})$ . Ainsi,  $\forall \{G_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \in \mathbb{N}}$  une collection de foncteurs tels que les axiomes  $(\tilde{\mathbf{H1}})$  à  $(\tilde{\mathbf{H4}})$  soient vérifiés et

$$G_n \mathbb{S}^0 = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases},$$

alors  $G_n X \cong \tilde{H}_n X$ .

### 6.3.2 Le car relatif

**6.3.7 Définition** (Groupe d'homologie relative). Le  $n$ -ième **groupe d'homologie relative** d'un couple d'espaces  $(X, A)$  est défini par :

$$H_n(X, A) = \tilde{H}_n C\tilde{j}$$

où  $\tilde{j}$  est la CW-approximation cellulaire de l'inclusion  $j : A \hookrightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{j} X & & \tilde{A} \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{X} \\
 \uparrow & & \downarrow \iota_{\tilde{A}} \\
 \tilde{A} \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{X} & & C\tilde{A} \longrightarrow C\tilde{j} \\
 \downarrow & & \downarrow i_{\tilde{j}} \\
 A & & \tilde{A}
 \end{array}$$

**6.3.8 Théorème.** Les foncteurs  $\{H_n : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \in \mathbb{N}}$  définissent une théorie d'homologie ordinaire avec

$$H_n(\{x\}, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Démonstration. On ne démontre que l'axiome d'excision.

**(H2)** : Soit une triade excissive  $(X, A, B)$  (i.e.  $A, B \subseteq X$  et  $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$ ). Posons les CW-approximations :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \hookrightarrow & X & \longleftarrow & B \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \tilde{A} & \longrightarrow & \tilde{A} \cup \tilde{B} & \longleftarrow & \tilde{B}
 \end{array}$$

On a  $H_n(A, A \cap B) = H_n(\tilde{A}/(\tilde{A} \cap \tilde{B}))$ . Or  $\tilde{A}/(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cong (\tilde{A} \cup \tilde{B})/\tilde{B}$ . Donc

$$H_n(A, A \cap B) = H_n(\tilde{A}/(\tilde{A} \cap \tilde{B})) = H_n((\tilde{A} \cup \tilde{B})/\tilde{B}) = H_n(X, B).$$

□

# Index

## — Symboles —

$(X, x_0) \vee (Y, y_0)$	25
$(X; A, B)$	13
$A \mapsto X$	46
$C(X, x_0)$	33
$CX$	33
$Cf$	33
$E_*$	14
$H_*$	14
$M_f$	48
$[(X, A), -]$	11
$[X, Y]_*$	10
$[f]$	10
$[f]_*$	10
$[x, t]$	33
$\Omega_{z_0} Z$	24
$\Sigma X$	15
$\Sigma_{z_0} Z$	28
$\mathcal{U}$	13
$\dim X$	51
$\eta_X$	61
$\iota_X$	33
$[(X, A), (Y, B)]$	10
$\nabla$	25
$\partial_n$	13
$\pi_n$	12
$\lrcorner$ (pullback)	9
$\lrcorner$ (pushout)	7
$\simeq_*$	10
$f^*$	11
$g_*$	11
$i_f$	33
$z \wedge t$	28

## — A —

<b>Ab</b>	6
Application	
caractéristique d'un CW-complexe	51
cellulaire	58
de pliage	25
Associativité	21

## Axiome

d'additivité	14, 64
d'exactitude	14, 63
d'excision	14
d'invariance	14, 64
de dimension	14, 64
de suspension	63

## Axiomes

d'Eilenberg - Steenrod	14
pour une théorie d'homologie réduite	63

## — B —

Bouquet	25
---------	----

## — C —

## Cône

réduit	33
d'une application basée	33

Catégorie	5
-----------	---

Cellule	51
---------	----

## Co-

associativité	26
inversion	26
multiplication	26
unité	26

Cofibration	46
-------------	----

Co- $H$ -espace	27
-----------------	----

Co- $H$ -espace associatif	27
----------------------------	----

Co- $H$ -groupe	27
-----------------	----

<b>ComTopMon</b>	59
------------------	----

Courte suite exacte	13
---------------------	----

## CW-

approximation	58
complexe	51
relatif	53

## — D —

Décomposition CW	51
------------------	----

Diagramme commutatif	6
----------------------	---

Dimension d'un CW-complexe	51
----------------------------	----

— <b>E</b> —		— <b>S</b> —	
Élément		<b>Set</b>	5
inverse	21	Smash	28
neutre	21	SP	59
Équivalence faible	12	Squelette	51
Espace des lacets	24	Suite	
— <b>F</b> —		de Dold - Puppe	40
Foncteur	6	exacte	13
oubli	6	d'ensembles	34
— <b>G</b> —		Suite exacte	
Groupe		courte	13
d'homologie		Suspension	15
réduite	63	réduite	28
relative	67	— <b>T</b> —	
d'homotopie supérieur	12	Théorie d'homologie	13
<b>Grp</b>	6	ordinaire	13
— <b>H</b> —		<b>Top</b>	6
HELP	55	Topologie de l'adhérence finie	51
$H$ -espace	23	<b>Top<sub>rel</sub></b>	9
$H$ -espace associatif	23	<b>Top<sub>*</sub></b>	6
$H$ -groupe	23	Triade excissive	13
$H$ -morphisme	23	— <b>W</b> —	
Homotopie	9	Wedge	25
absolue	10		
basée	10		
équivalence de	10		
type d'	10		
— <b>I</b> —			
Invariant homotopique	10		
absolu	10		
basé	10		
— <b>M</b> —			
Mapping			
cone	33		
cylinder	49		
— <b>N</b> —			
$n$ -équivalence	54		
— <b>P</b> —			
PEH	46		
Propriété d'extension d'homotopie	46		
Pullback	8		
Pushout	7		
— <b>Q</b> —			
Quasi-fibration	61		